

DEMOSTRANDO TRIÁNGULOS PARTE 1

GUÍA DEL MAESTRO

MATERIA: Matemáticas

NIVEL: 7-9

AUTOR: Prof. Josiel Rosado Tirado

CONCEPTO PRINCIPAL

- TRIÁNGULOS

CONCEPTOS SECUNDARIOS

- Teorema de la suma de los ángulos
- Teorema del ángulo exterior
- Teorema de la desigualdad triangular

OBJETIVOS ESPECÍFICOS: Durante la capacitación los participantes:

1. Describen características de los lados y los ángulos de triángulos.
2. Demuestran el teorema de la suma de los ángulos de un triángulo.
3. Formulan conjeturas basadas en observaciones o construcciones geométricas.
4. Construyen la demostración del teorema de la suma de ángulos de un triángulo utilizando la aplicación Cabri Jr. de la calculadora TI-84.
5. Demuestran el teorema del ángulo exterior de un triángulo.
6. Construyen la demostración del teorema del ángulo exterior de un triángulo utilizando la aplicación Cabri Jr. de la calculadora TI-84.
7. Construyen triángulos con lados de distintas longitudes utilizando manipulativos.
8. Aplican el teorema de la desigualdad triangular en situaciones de la vida real.
9. Crean programas con la calculadora TI-84 para determinar si tres longitudes forman un triángulo o no.

ESTÁNDARES, EXPECTATIVAS E INDICADORES POR GRADO

Geometría: El estudiante es capaz de identificar formas geométricas, analizar sus estructuras, características, propiedades y relaciones para entender y descubrir el entorno físico.

Séptimo

10.0 RELACIONES ENTRE ÁNGULOS: Identifica, justifica y aplica las relaciones entre los ángulos al describir figuras geométricas.

G.FG.7.10.1 Desarrolla y sostiene argumentos convincentes relacionados con relaciones entre ángulos usando modelos y dibujos con y sin ayuda de la tecnología.

G.FG.7.10.2 Identifica, establece y aplica las propiedades básicas asociadas con ángulos complementarios, suplementarios y ángulos formados por transversales que intersecan líneas paralelas.

G.FG.7.10.3 Identifica, establece y aplica las propiedades de la suma de ángulos para los triángulos y otros polígonos.

11.0 TEOREMA DE PITÁGORAS: Explora y aplica el Teorema de Pitágoras para resolver problemas de medición.

G.FG.7.11.1 Explora el Teorema de Pitágoras al investigar los triángulos rectángulos, sus medidas y sus áreas.

G.FG.7.11.2 Aplica el Teorema de Pitágoras para resolver problemas.

Noveno

4.0 DEMOSTRACIONES GEOMÉTRICAS: Aplica métodos matemáticos de prueba para desarrollar justificaciones para los teoremas básicos de la geometría euclidiana.

G.FG.9.4.1 Establece conjeturas basadas en la exploración de situaciones geométricas, con y sin tecnología.

G.FG.9.4.4 Organiza y presenta pruebas directas y pruebas indirectas utilizando dos columnas, párrafos y flujogramas.

Grado 10

11.0 TEOREMA DE PITÁGORAS: Demuestra y aplica el Teorema de Pitágoras y su recíproco.

G.FG.10.11.1 Prueba el Teorema de Pitágoras y su recíproco.

G.LR.10.11.2 Aplica el Teorema de Pitágoras en situaciones de dos y tres dimensiones.

***G.FG.10.12.2** Aplica las razones trigonométricas seno, coseno y tangente para determinar medidas de los ángulos y las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.*

MATERIALES (por capacitador)

5 “sticky notes pad” color blanca o colores claros

10 reglas

15 lápices de madera

5 paquetes de marcadores permanentes

5 rollos de tape transparente

10 tijeras

10 paquetes de lápices de colores o crayolas

1 rollo de *masking* tape

20 calculadoras TI-84 con Cabri Jr.

20 set de “Geostix”

10 transportadores

GLOSARIO

- **Ángulo** - Si dos rayos tienen el mismo origen o extremo, pero no están en la misma recta, entonces su unión es un *ángulo*. Los dos rayos se llaman los *lados* del ángulo y el extremo común se llama el *vértice*. Si los rayos son \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} , entonces el ángulo se indica con $\angle BAC$ o con $\angle CAB$.
- **Triángulo** - Si A , B y C son tres puntos cualesquiera no alineados, entonces la reunión de los segmentos \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{BC} se llama *triángulo*, y se indica con $\triangle ABC$. Los puntos A , B y C se llaman *vértices*, y los segmentos \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{BC} se llaman *lados*. Todo triángulo $\triangle ABC$ determina tres ángulos: $\angle BAC$, $\angle ABC$ y $\angle ACB$. A éstos los llamamos los ángulos del $\triangle ABC$. Si está claro a qué triángulo nos referimos, frecuentemente podemos designarlos por $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$.
- **Conjetura** – Suposición informada. Es una afirmación que, al no haber sido probada pero tampoco refutada, se concibe como cierta. Sólo cuando se haya podido demostrar su veracidad, la conjetura pasará a ser un teorema.
- **Teorema** – Un enunciado, a menudo de carácter general, que puede ser demostrado apelando a postulados, definiciones, propiedades algebraicas y reglas de lógica.
- **Demostración** - Argumento lógico que muestra que la verdad de una hipótesis garantiza la verdad de la conclusión.
- **Razón trigonométrica** – una razón entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

TEOREMAS

- **Teorema de la suma de los ángulos:** La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° .
- **Teorema del ángulo exterior:** La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos o interiores no adyacentes o remotos.
- **Teorema de la desigualdad triangular:** La suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.
- **Teorema de Pitágoras:** En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.
- **Teorema recíproco o inverso del teorema de Pitágoras:** Si la suma de los cuadrados de las medidas de dos lados de un triángulo es igual al cuadrado de la medida del lado más largo, entonces el triángulo es rectángulo.

TRASFONDO

El Estándar de Geometría presenta una amplia visión del poder de la geometría, el cual invita a los estudiantes a analizar características de las figuras geométricas y desarrollar argumentos acerca de las relaciones geométricas; así como a usar la visualización, el razonamiento espacial y los modelos geométricos para resolver problemas. La geometría es un área de las matemáticas que permite el desarrollo natural de las habilidades de razonamiento y justificación en los estudiantes.

El triángulo es la primera forma geométrica que estudiarás. Los triángulos son los polígonos más simples, pues constan tan sólo de tres lados y también de tres ángulos. De ahí su nombre de triángulo o trigono: Tri = tres; ángulo = ángulo; gono = lado. Los triángulos tienen una importancia suprema en la geometría, pues todo polígono puede ser descompuesto o formado por triángulos. Esta gran importancia de los triángulos en la geometría, ya la conocían los geómetras desde los tiempos de las primeras civilizaciones. El uso de esta forma tiene una larga historia. El triángulo juega un rol práctico en la vida de los antiguos egipcios y chinos como una ayuda para delimitar y medir tierras. Los triángulos en nuestro entorno, ha sido y es de gran importancia, entre ellas podemos recordar a las grandes pirámides de Egipto. También en las construcciones modernas, en los anuncios de seguridad vial, entre otros. Hoy en día, los triángulos son usados frecuentemente en arquitectura, agrimensura y otras áreas de nuestro diario vivir. El estudio de los triángulos es tan amplio, que ha generado en sí misma una rama de la Geometría y de las Matemáticas, es la Trigonometría.

Por ello es necesario que debamos aprender cuáles son sus elementos, su clasificación y propiedades fundamentales.

PROCESO EDUCATIVO

1. Administración pruebas

- a. Se evaluará el conocimiento de los participantes antes de la capacitación con la Preprueba y el conocimiento después con la Posprueba (documentos adjuntos).

2. Assessment Continuo

- a. Obviamente la preprueba y la posprueba son parte del assessment de la capacitación. Es la primera ayuda al capacitador para tomar decisiones acerca del conocimiento que tiene el participante del tema y de las próximas actividades que llevará a cabo. Mientras la posprueba ayuda al capacitador a tomar decisiones de la necesidad de re enseñanza en próximas capacitaciones.
- b. Las hojas de trabajo, el capacitador las utilizará como assessment. Los participantes estarán cotejando su aprendizaje en la medida que se discutan las mismas en grupo grande. Además, el capacitador las corrige y las utilizarlas para tomar decisiones.
- c. Durante todas las actividades el capacitador estará haciendo observaciones mientras se mueve entre las parejas, cuando los participantes discuten con su pareja y cuando presentan sus respuestas a las preguntas. Esto le permite hacer conclusiones del aprendizaje de éstos y los próximos pasos a seguir.

Actividad Inicio: “¿Qué conozco de los triángulos?”

1. La actividad está diseñada para indagar el conocimiento que tienen los participantes acerca del concepto triángulo.
2. Se dividen los participantes en cuatro o cinco grupos y se le pide que recorten y peguen en un papelote el triángulo que les toco. Deben discutir entre ellos todas las características y todas las formas que conocen de resolver ese triángulo. Deben escribir todas sus ideas en el papelote.



ALACiMa²

CENTROS DE EXCELENCIA EN CIENCIAS Y MATEMÁTICAS

(ALACiMa²- FASE 4)

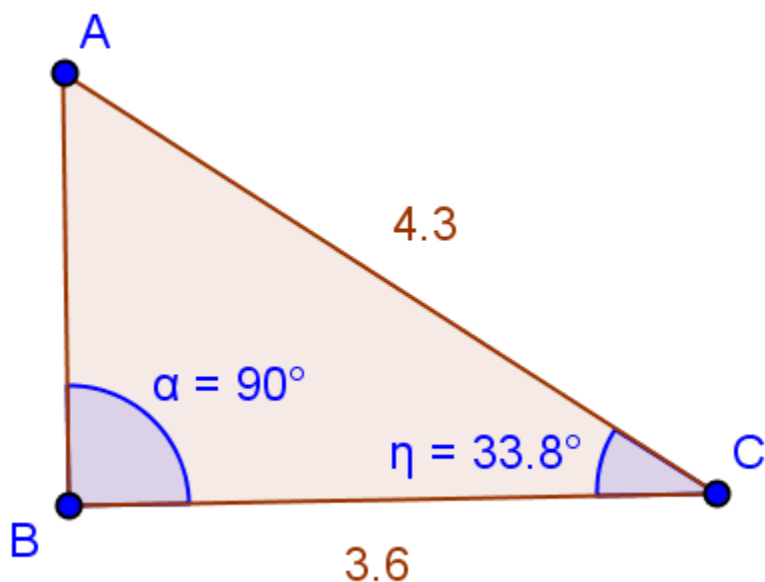
3. Cada grupo presenta su triángulo al grupo grande. El capacitador y los participantes no pasarán juicio sobre la presentación de cada grupo. El capacitador estará observando las presentaciones e identificará concepciones erróneas, si las hay, para luego a través de la capacitación hacer énfasis en las mismas y corregirlas. En el cierre de la capacitación los participantes volverán a revisar sus papelotes y harán los arreglos pertinentes. De esta forma tendrán la oportunidad de percatarse de los posibles errores y corregirlos, mientras el capacitador tendrá un assessment final.

Actividad inicio: “¿Que conozco de los triángulos?”

Instrucciones: Deben discutir entre ustedes todas las características y todas las formas que conocen de resolver este triángulo. Deben escribir todas sus ideas en el papel y luego un miembro del grupo va a la pizarra y escribe las características de su triángulo y las formas de resolverlo.

En grupo grande se discuten todos los triángulos.

#1

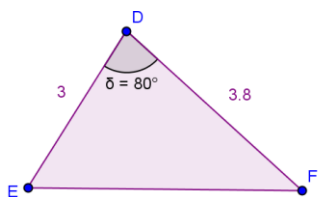


Actividad inicio: “¿Que conozco de los triángulos?”

Instrucciones: Deben discutir entre ustedes todas las características y todas las formas que conocen de resolver este triángulo. Deben escribir todas sus ideas en el papel y luego un miembro del grupo va a la pizarra y escribe las características de su triángulo y las formas de resolverlo.

En grupo grande se discuten todos los triángulos.

#2

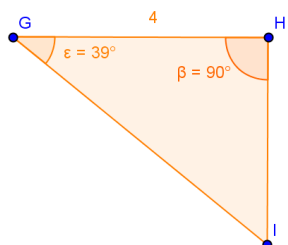


Actividad inicio: “¿Que conozco de los triángulos?”

Instrucciones: Deben discutir entre ustedes todas las características y todas las formas que conocen de resolver este triángulo. Deben escribir todas sus ideas en el papel y luego un miembro del grupo va a la pizarra y escribe las características de su triángulo y las formas de resolverlo.

En grupo grande se discuten todos los triángulos.

#3

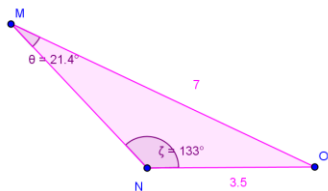


Actividad inicio: “¿Que conozco de los triángulos?”

Instrucciones: Deben discutir entre ustedes todas las características y todas las formas que conocen de resolver este triángulo. Deben escribir todas sus ideas en el papel y luego un miembro del grupo va a la pizarra y escribe las características de su triángulo y las formas de resolverlo.

En grupo grande se discuten todos los triángulos.

#4

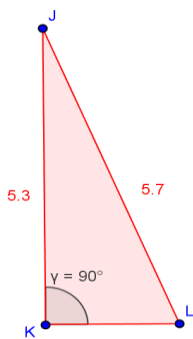


Actividad inicio: “¿Que conozco de los triángulos?”

Instrucciones: Deben discutir entre ustedes todas las características y todas las formas que conocen de resolver este triángulo. Deben escribir todas sus ideas en el papel y luego un miembro del grupo va a la pizarra y escribe las características de su triángulo y las formas de resolverlo.

En grupo grande se discuten todos los triángulos.

#5



DESARROLLO

Durante toda la capacitación las participantes trabajarán en equipos colaborativos; algunas actividades se pueden trabajar individualmente. Antes de comenzar con la primera actividad es importante definir algunos conceptos. (Para todas las definiciones ver glosario)

1. El capacitador comienza preguntando ¿Qué es un ángulo?
2. El capacitador junto con los participantes define lo que es un ángulo
3. Se provee la definición formal.

Ángulo - Si dos rayos tienen el mismo origen o extremo, pero no están en la misma recta, entonces su unión es un *ángulo*. Los dos rayos se llaman los *lados* del ángulo y el extremo común se llama el *vértice*. Si los rayos son \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} , entonces el ángulo se indica con $\angle BAC$ o con $\angle CAB$.

4. El capacitador comienza preguntando ¿Qué es un triángulo?
5. El capacitador junto con los participantes define lo que es un triángulo
6. Se provee la definición formal.

Triángulo - Si A , B y C son tres puntos cualesquiera no alineados, entonces la reunión de los segmentos \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{BC} se llama *triángulo*, y se indica con $\triangle ABC$. Los puntos A , B y C se llaman *vértices*, y los segmentos \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{BC} se llaman *lados*. Todo triángulo $\triangle ABC$ determina tres ángulos: $\angle BAC$, $\angle ABC$ y $\angle ACB$. A éstos los llamamos los ángulos del $\triangle ABC$. Si está claro a qué triángulo nos referimos, frecuentemente podemos designarlos por $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$.

7. El capacitador comienza preguntando ¿Qué es una conjetura?
8. El capacitador junto con los participantes define lo que es una conjetura
9. Se provee la definición formal.

Conjetura – Suposición informada. Es una afirmación que, al no haber sido probada pero tampoco refutada, se concibe como cierta. Sólo cuando se haya podido demostrar su veracidad, la conjetura pasará a ser un teorema.

10. El capacitador comienza preguntando ¿Qué es un teorema?
11. El capacitador junto con los participantes define lo que es un teorema
12. Se provee la definición formal.

Teorema – Un enunciado, a menudo de carácter general, que puede ser demostrado apelando a postulados, definiciones, propiedades algebraicas y reglas de lógica.

13. El capacitador comienza preguntando ¿Qué es una demostración?
14. El capacitador junto con los participantes define lo que es una demostración
15. Se provee la definición formal.

Demostración - Argumento lógico que muestra que la verdad de una hipótesis garantiza la verdad de la conclusión.

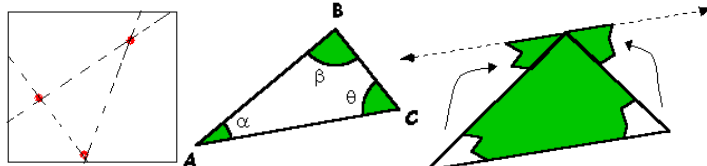
ACTIVIDAD #1: DEMOSTRANDO TEOREMA DE LA SUMA DE LOS ÁNGULOS (HOJA DE TRABAJO # 1)

El objetivo de esta actividad es ver concretamente que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° , para que luego completen la demostración mediante el uso de definiciones y relaciones angulares formalmente.

1. Se reparte la Hoja de Trabajo # 1 y se discuten las instrucciones con los participantes.

Instrucciones:

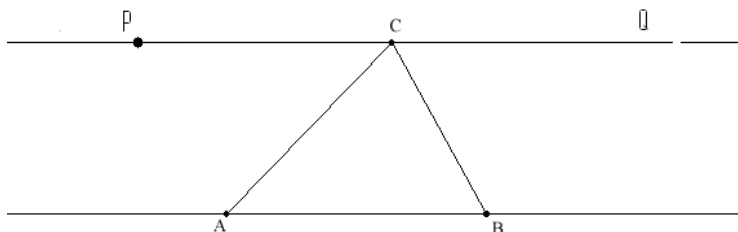
- En un papel "sticky notes" dibuja tres puntos diferentes que no sean colineales.
- Dobla el papel "sticky notes" por cada par de puntos. Observa la imagen.
- Delinea y recorta el triángulo que se forma.
- Colorea los ángulos de tu triángulo y numéralos.
- Recorta dos de los ángulos del triángulo.
- Toma un "sticky notes" y dibuja una recta.



- Une los vértices de los tres ángulos y colócalos encima del "sticky notes" donde previamente dibujaste la recta.
- Coloca cinta adhesiva sobre los tres ángulos.
- Ahora, ¿Qué puedes concluir?
- Formula una conjetura.

Nota: Deben llegar a la conclusión que **La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es igual a 180° .**

- Prueba tu conjetura.
- Utiliza el siguiente dibujo para probar tu conjetura:



Teorema: Si ABC es un triángulo entonces $m(\angle ABC) + m(\angle BCA) + m(\angle CAB) = 180^\circ$

Demostración: Dibuje el triángulo ABC, dibuje una recta que pase por \overline{AB} y otra recta paralela y que pase por C como muestra la figura.

Como \overline{AB} y \overline{PC} son paralelas, $\angle PCA \cong \angle CAB$ (alternos internos) y $\angle ABC \cong \angle BCQ$ (alternos internos). Pero $m(\angle PCA) + m(\angle ACB) + m(\angle BCQ) = 180^\circ$ (forman ángulo llano). Por consiguiente, si sustituimos $m(\angle CAB) + m(\angle ACB) + m(\angle ABC) = 180^\circ$ (propiedad de la igualdad)

Nota: Debe proveer tiempo para que los participantes realicen la demostración. De ser necesario repase las relaciones de ángulos en rectas paralelas y la transversal.

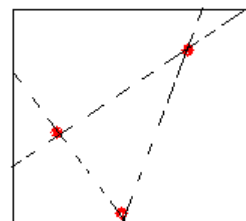
- Mientras los grupos realizan la demostración el capacitador contesta preguntas y se asegura que los grupos trabajen colaborativamente.
- En grupo grande se discute la Hoja de Trabajo #1.
- El capacitador presenta el teorema de la suma de ángulos en el triángulo.

Teorema de la suma de los ángulos: La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° .

Hoja de trabajo #1 “Demostrando teorema de la suma de los ángulos”

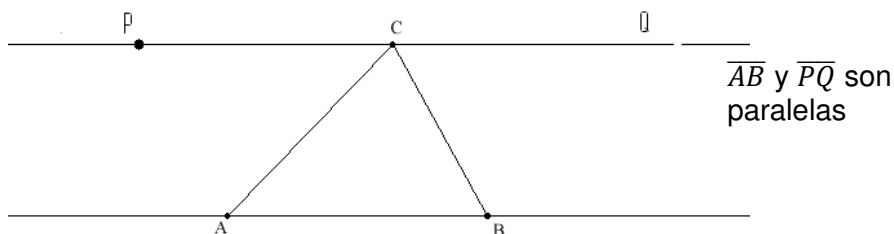
Instrucciones:

- En un papel “sticky notes” dibuja tres puntos diferentes que no sean colineales.
- Dobla el papel “sticky notes” por cada par de puntos. Observa la imagen.
- Delinea y recorta el triángulo que se forma.
- Colorea los ángulos de tu triángulo y numéralos.
- Recorta dos de los ángulos del triángulo.
- Toma un “sticky notes” y dibuja una recta.
- Une los vértices de los tres ángulos y colócalos encima del “sticky notes” la recta.
- Coloca cinta adhesiva sobre los tres ángulos.
- Ahora, ¿Qué puedes concluir?
- Formula una conjetura.
- Prueba tu conjetura.



bujaste

Utiliza el siguiente dibujo para probar tu conjetura



Prueba:

Afirmaciones	Razones
a. \overline{AB} y \overline{PC} son paralelas	
b. $\angle PCA \cong \angle CAB$	
c. $\angle ABC \cong \angle BCQ$	
d. $m(\angle PCA) + m(\angle ACB) + m(\angle BCQ) = 180^\circ$	
e. $m(\angle CAB) + m(\angle ACB) + m(\angle ABC) = 180^\circ$	

ACTIVIDAD #2: SUMA DE ÁNGULOS CON CABRI JR

(HOJA DE TRABAJO # 2)

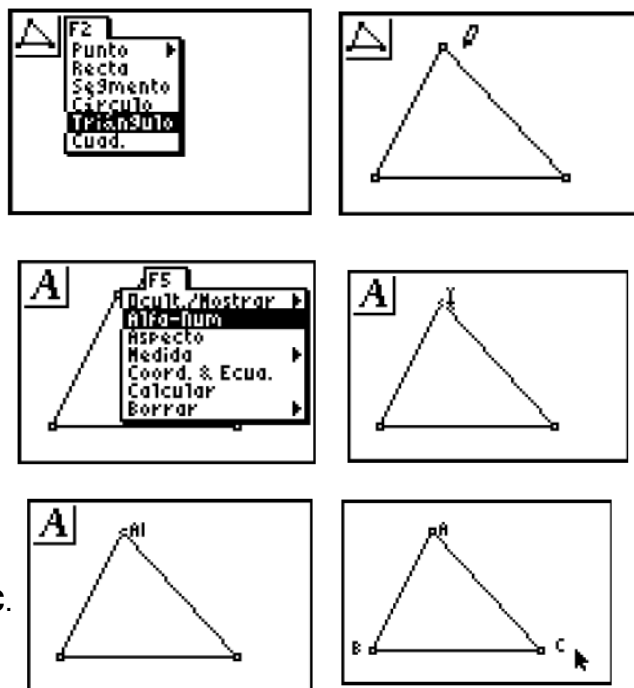
El objetivo de esta actividad es establecer y probar conjeturas de la suma de ángulos de un triángulo basadas en la exploración de situaciones geométricas con tecnología.

1. Se reparte la Hoja de Trabajo # 2 y se discuten las instrucciones con los participantes.

Instrucciones: Abra la APPS Cabri Jr. en su calculadora TI-84 Plus

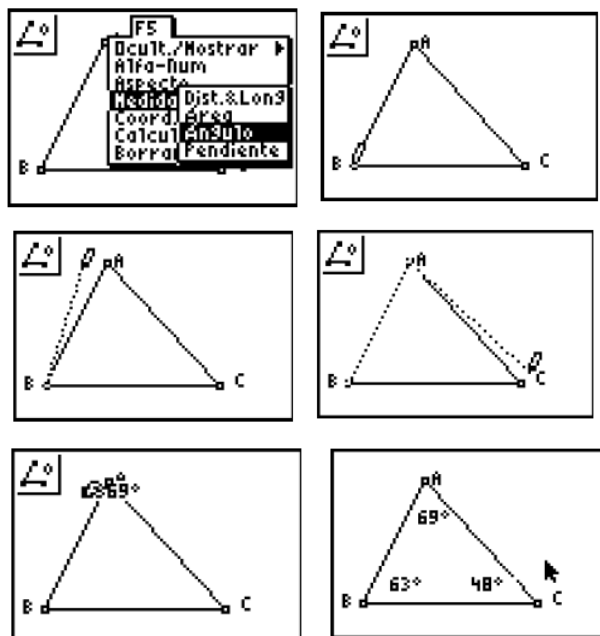
Como medir los ángulos internos de un triángulo.

1. Abra la herramienta de dibujo y seleccione triángulo presione ENTER.
2. Mueva el cursor hacia la esquina izquierda de la pantalla y presione ENTER para dibujar el primer vértice del triángulo.
3. Mueva el cursor para ubicar el segundo vértice y presione ENTER. Repita esto para el tercer vértice.
4. Abra la ventana de herramientas de dibujo y seleccione Alpha-Num. Presione ENTER.
5. Mueva el cursor hacia el vértice superior del triángulo. El punto se “anima” cuando el cursor se encuentra cerca del punto seleccionado.
6. Presione ENTER para etiquetar este punto. Presione MATH para escribir la letra **A** (observe que alpha lock esta activado), presione ENTER para completar la etiqueta.
7. Repita el paso 6 para etiquetar los otros vértices **B** y **C**. **B** está encima de **APPS** y **C** está sobre **PRGM**. Cuando termine presione **CLEAR** para salir de la herramienta Alpha-Numeric.



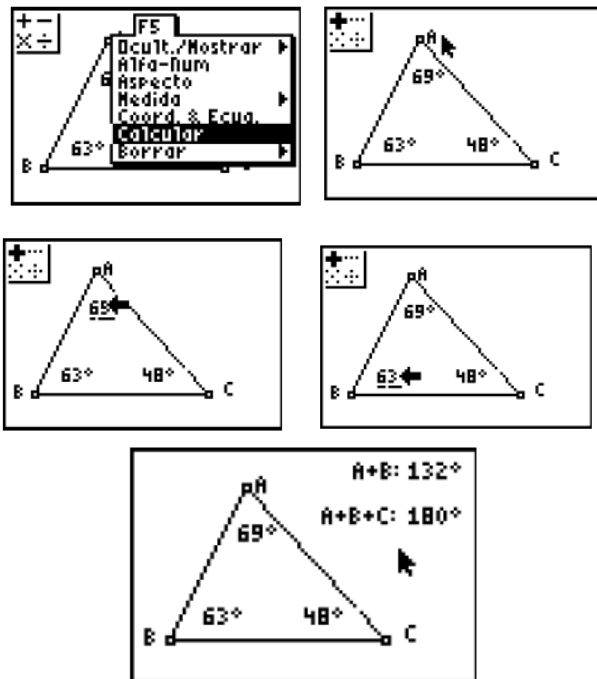
Medir todos los ángulos interiores de $\triangle ABC$

8. Abra la herramienta de dibujo y seleccione **medida**. Presione para ver las herramientas de medida. Seleccione **ángulo** y presione ENTER.
9. Los ángulos son medidos seleccionando todos los puntos. Seleccione el vértice del segundo ángulo.
 - a. Para medir $\angle A$, primero mueva el cursor al punto **B**, y presione ENTER.
 - b. Mueva el cursor al vértice del ángulo, punto **A**, presione ENTER.
 - c. Mueva el cursor al tercer punto sobre el ángulo, punto **C**, presione ENTER.
 - d. Finalmente, mueva el resultado obtenido a la ubicación deseada, y presione ENTER para que desaparezca la “manita”.
 - e. Repita el proceso para medir los otros dos ángulos.



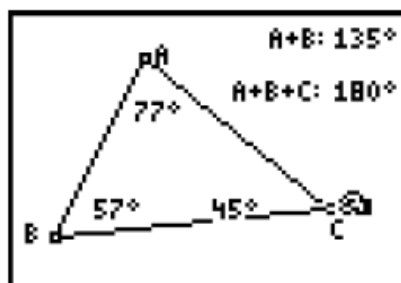
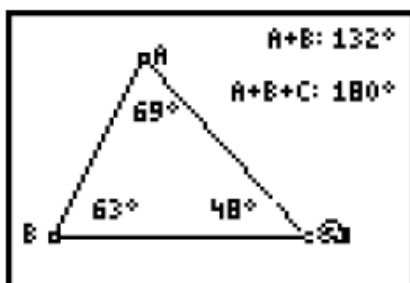
Calculo de la suma de los ángulos internos.

10. Abra el menú de herramienta de dibujo, seleccione **calcular**. Presione ENTER.
11. En esta herramienta puede sumar todos los números que quiera. Inicie sumando la medida del ángulo **A** más ángulo **B** más ángulo **C**.
 - a. Mueva el cursor a la medida del ángulo A y presione ENTER.
 - b. Mueva el cursor hacia la medida del ángulo **B** y presione ENTER
 - c. Mueva el cursor hacia la medida del ángulo **C** y presione ENTER
 - d. Presione + para indicar la suma.
 - e. Use las flechas de dirección para mover el resultado a un área de la pantalla y presione ENTER. Cuando termine presione CLEAR para salir de la herramienta de Cálculo.



Mueva el vértice de un ángulo.

13. Mueva el cursor ubicándolo en el punto del vértice deseado, presionando **ALPHA**. Use las flechas de dirección y observe lo que pasa al mover el vértice con la suma de los ángulos medidos.
14. Explore que sucede al mover los vértices **A**, **B** o **C**.
15. Observe que al mover cualquier el vértice la suma de **A + B + C** permanece constante.



2. Mientras los participantes utilizan el Cabri Jr el capacitador contesta preguntas y se asegura que los participantes trabajen correctamente la aplicación.

Nota: Verificar que todos los participantes hayan podido realizar las construcciones. Es importante que tengan claro cómo funciona la aplicación Cabri Jr. Si un participante tiene dificultades puede asignar un compañero que lo guíe. De ser necesario realizar esta primera actividad con el Cabri Jr de forma guiada paso a paso proyectando el proceso.

3. En grupo grande se discute la Hoja de Trabajo #2.

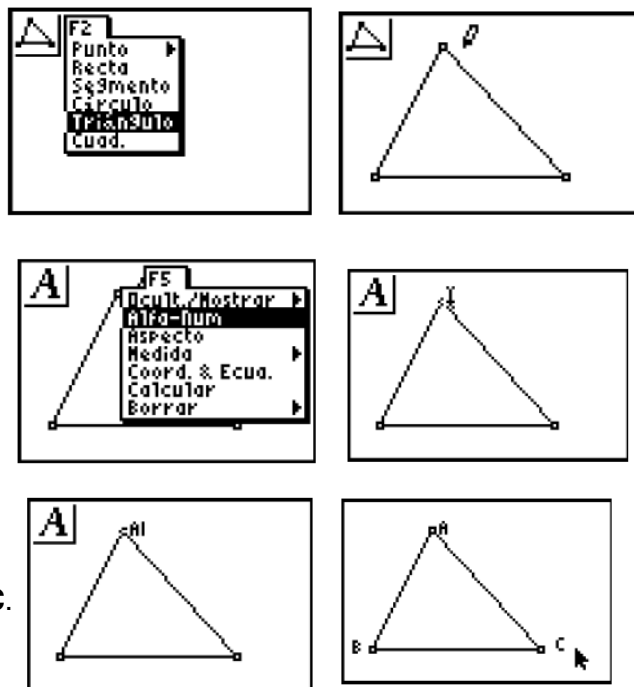
Nota: Reflexionar con los participantes como esta tecnología ayuda a la elaboración de conjeturas basada en observaciones geométricas y como facilita la demostración de estas conjeturas. Permitir que los participantes hablen sobre el tema.

Hoja de trabajo #2 “Suma de ángulos con Cabri Jr.”

Instrucciones: Abra la APPS Cabri Jr. en su calculadora TI-84 Plus

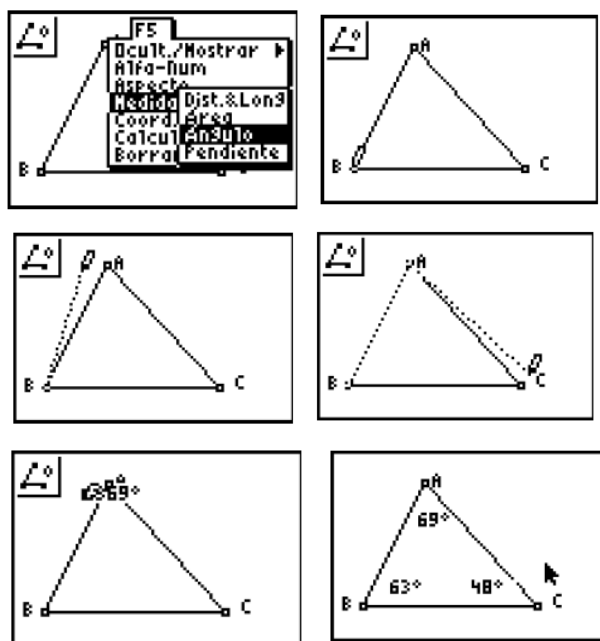
Como medir los ángulos internos de un triángulo.

1. Abra la herramienta de dibujo y seleccione triángulo presione ENTER.
2. Mueva el cursor hacia la esquina izquierda de la pantalla y presione ENTER para dibujar el primer vértice del triángulo.
3. Mueva el cursor para ubicar el segundo vértice y presione ENTER. Repita esto para el tercer vértice.
4. Abra la ventana de herramientas de dibujo y seleccione Alpha-Num. Presione ENTER.
5. Mueva el cursor hacia el vértice superior del triángulo. El punto se “anima” cuando el cursor se encuentra cerca del punto seleccionado.
6. Presione ENTER para etiquetar este punto. Presione MATH para escribir la letra **A** (observe que alpha lock esta activado), presione ENTER para completar la etiqueta.
7. Repita el paso 6 para etiquetar los otros vértices **B** y **C**. **B** está encima de **APPS** y **C** está sobre **PRGM**. Cuando termine presione **CLEAR** para salir de la herramienta Alpha-Numeric.



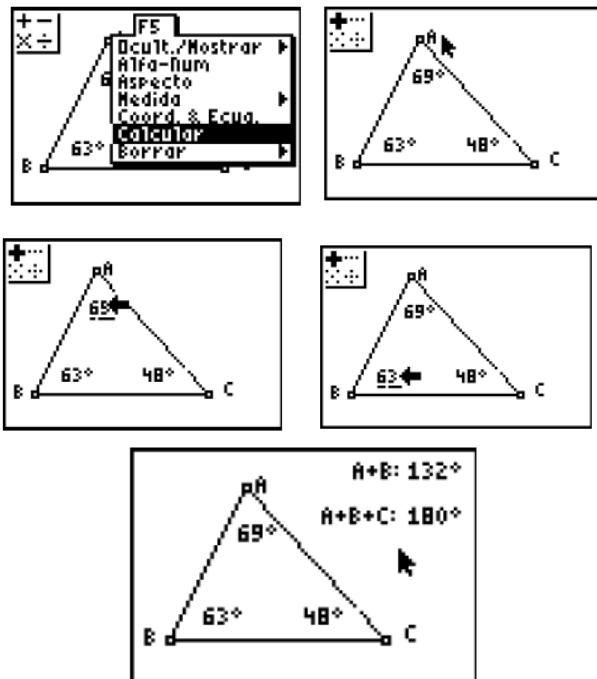
Medir todos los ángulos interiores de $\triangle ABC$

8. Abra la herramienta de dibujo y seleccione **medida**. Presione para ver las herramientas de medida. Seleccione **ángulo** y presione ENTER.
9. Los ángulos son medidos seleccionando todos los puntos. Seleccione el vértice del segundo ángulo.
 - a. Para medir $\angle A$, primero mueva el cursor al punto **B**, y presione ENTER.
 - b. Mueva el cursor al vértice del ángulo, punto **A**, presione ENTER.
 - c. Mueva el cursor al tercer punto sobre el ángulo, punto **C**, presione ENTER.
 - d. Finalmente, mueva el resultado obtenido a la ubicación deseada, y presione ENTER para que desaparezca la “manita”.
 - e. Repita el proceso para medir los otros dos ángulos.



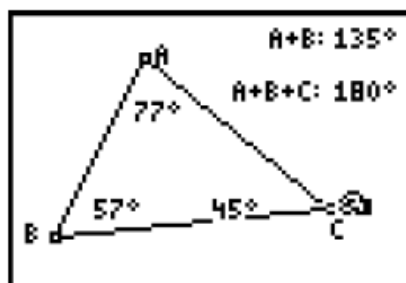
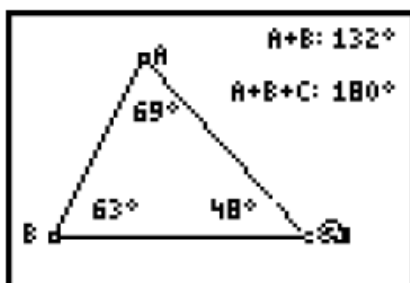
Calculo de la suma de los ángulos internos.

10. Abra el menú de herramienta de dibujo, seleccione **calcular**. Presione ENTER.
11. En esta herramienta puede sumar todos los números que quiera. Inicie sumando la medida del ángulo **A** más ángulo **B** más ángulo **C**.
 - a. Mueva el cursor a la medida del ángulo **A** y presione ENTER.
 - b. Mueva el cursor hacia la medida del ángulo **B** y presione ENTER
 - c. Mueva el cursor hacia la medida del ángulo **C** y presione ENTER
 - d. Presione + para indicar la suma.
 - e. Use las flechas de dirección para mover el resultado a un área de la pantalla y presione ENTER. Cuando termine presione CLEAR para salir de la herramienta de Cálculo.



Mueva el vértice de un ángulo.

13. Mueva el cursor ubicándolo en el punto del vértice deseado, presionando **ALPHA**. Use las flechas de dirección y observe lo que pasa al mover el vértice con la suma de los ángulos medidos.
14. Explore que sucede al mover los vértices **A**, **B** o **C**.
15. Observe que al mover cualquier el vértice la suma de **A + B + C** permanece constante.



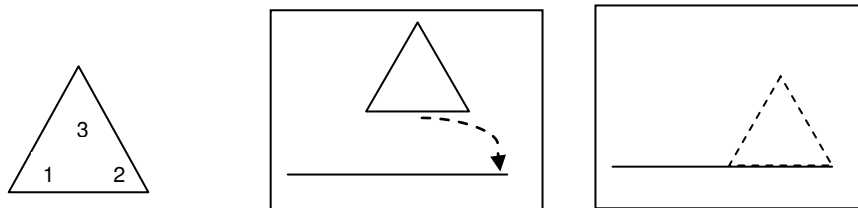
ACTIVIDAD #3: DEMOSTRANDO TEOREMA DEL ÁNGULO EXTERIOR (HOJA DE TRABAJO # 3)

El objetivo de esta actividad es ver concretamente que el ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes, para que luego completen la demostración mediante el uso de definiciones y relaciones angulares formalmente.

1. Se reparte la Hoja de Trabajo # 3 y se discuten las instrucciones con los participantes.

Instrucciones:

- En un papel “sticky notes” dibuja un triángulo acutángulo.
- Dibuja y enumera los ángulos.
- En otro papel “sticky notes” dibuja una recta pegada al margen o borde del papel.
- Recorta el triángulo y utilízalo para trazar un triángulo sobre la recta dibujada en el “sticky notes”, debe quedar un pedazo de la recta fuera del triángulo formando un ángulo exterior. Ver imagen.



- Recorta los ángulos $\sphericalangle 2$ y $\sphericalangle 3$ (interiores remotos/no adyacentes) y ubícalos sobre el ángulo exterior.
- Coloca cinta adhesiva sobre los dos ángulos.
- Ahora, ¿Qué puedes concluir?
- Formula una conjetura.
- Haz un dibujo.
- Indica que información es dada.
- Discute que es lo que tienes que demostrar
- Demuestra tu conjetura.

A DEMOSTRAR: $m(\sphericalangle ACD) = m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle BAC)$

Demostración: Probamos que $m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle ACB) = 180^\circ$

Además, $m(\sphericalangle ACB) + m(\sphericalangle ACD) = 180^\circ$ porque son un par lineal.

De lo anterior se desprende, $m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle ACB) + m(\sphericalangle ACD)$
propiedad de igualdad de la suma.

Restando a ambos lados $m(\sphericalangle ACB)$, obtenemos $m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle ACD)$.

- En grupo grande se discute la Hoja de Trabajo #1.
- El capacitador presenta el teorema del ángulo exterior en el triángulo.

Teorema del ángulo exterior: La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes o remotos.

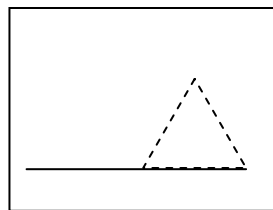
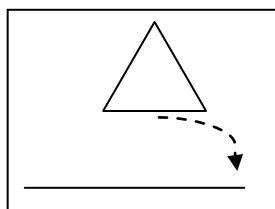
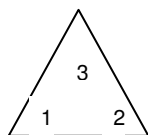
Luego de demostrar tu conjetura, utiliza Cabri Jr. para verificar que tu conjetura es cierta para todos los valores. (Presenta tu trabajo)

Nota: Si crees pertinente y necesario, solicita a los participantes realicen la demostración utilizando la aplicación Cabri Jr. Verifica que tengas el tiempo necesario para realizar estas parte de la actividad. De no tener el tiempo, indícales que esta demostración se puede realizar con la calculadora y anímalos a realizar dicha demostración en sus casas.

Hoja de trabajo #3 “Demostrando teorema del ángulo exterior”

Instrucciones:

1. En un papel “sticky notes” dibuja un triángulo acutángulo.
2. Dibuja y enumera los ángulos.
3. En otro papel “sticky notes” dibuja una recta pegada al margen o borde del papel.
4. Recorta el triángulo y utilízalo para trazar un triángulo sobre la recta dibujada en el “sticky notes”, debe quedar un pedazo de la recta fuera del triángulo formando un ángulo exterior. Ver imagen.



5. Recorta los ángulos $\angle 2$ y $\angle 3$ (interiores remotos/no adyacentes) y ubícalos sobre el ángulo exterior.
6. Coloca cinta adhesiva sobre los dos ángulos.
7. Ahora, ¿Qué puedes concluir?
8. Formula una conjetura.
9. Haz un dibujo.
10. Indica que información es dada.
11. Discute que es lo que tienes que demostrar
12. Demuestra tu conjetura.

Afirmaciones	Razones

Comprueba tu conjetura, utiliza Cabri Jr. para verificar que tu conjetura es cierta para todos los valores.
(Presenta tu trabajo)

ACTIVIDAD #4: CONSTRUYENDO TRIÁNGULOS

(HOJA DE TRABAJO # 4)

El objetivo de esta actividad es construir triángulos utilizando materiales concretos. Luego mediante la observación de las medidas geométricas llegar a la deducción del teorema de desigualdades triangulares.

1. Se reparte la Hoja de Trabajo # 4 y se discuten las instrucciones con los participantes.

Instrucciones: Utiliza los “Geostix” para construir 5 triángulos distintos. Completa la tabla y contesta las preguntas. Luego utiliza los “Geostix” para construir triángulos con las piezas indicadas. Cada pieza tiene su medida.

- a. Uno rojo, uno violeta y uno anaranjado.
 - b. Uno azul y dos amarillos.
 - c. Uno verde y dos rojos.
 - d. Uno rojo, uno anaranjado y uno verde claro.
 - e. Tres de diferentes colores (diferentes al primero)
2. Mientras los grupos resuelven los problemas el capacitador contesta preguntas y se asegura que los grupos trabajen colaborativamente.
 3. En grupo grande se discuten las preguntas y los ejercicios de la Hoja de Trabajo #4.
 4. El capacitador presenta el teorema de la desigualdad triangular.

Teorema de la desigualdad triangular: La suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.

Hoja de trabajo #4
“Construyendo triángulos”

Instrucciones: Utiliza los “Geostix” para construir 5 triángulos distintos. Completa la tabla y contesta las preguntas. Luego utiliza los “Geostix” para construir triángulos con las piezas (cada una tiene su medida) indicadas.

Triángulo	Longitud lado #1	Longitud lado #2	Longitud lado #3	Suma lado1+lado2	Suma lado1+lado3	Suma lado2+lado3
#1						
#2						
#3						
#4						
#5						

Preguntas:

- ¿Cómo se comparan las longitudes de cada lado de los triángulos con la suma de dos longitudes cualesquiera? Explica (la de la suma es mayor siempre) ver tabla
- ¿Puede haber un lado que tenga mayor longitud que la suma de las longitudes de los otros dos lados? Explica (no puede haber un lado mayor que la suma de los otros dos lados por qué no cerraría el triángulo)
- ¿Con tres lados de cualquier longitud siempre se forman triángulos? Explica, da ejemplos o contra ejemplos. (no se puede dos piezas pequeñas con una grande no se puede cerrar)
- Si conozco las longitudes de dos lados de una figura, ¿Puedo encontrar la longitud del tercer lado que forma el triángulo? Explica. (no se puede saber exactamente cuánto mide la tercera, se puede dar un aproximado)

Construye varios triángulos con los “Geostix” indicados. En el papel realiza bosquejos de tus construcciones, escribe las medidas de cada lado y explica cada bosquejo.

- Uno rojo, uno violeta y uno anaranjado.
- Uno azul y dos amarillos.
- Uno verde y dos rojos.
- Uno rojo, uno anaranjado y uno verde claro.
- Tres de diferentes colores (diferentes al primero)

¿Qué conjetura puedes realizar?

ACTIVIDAD #5: EL CAMINO MÁS CORTO

(HOJA DE TRABAJO # 5)

El objetivo de esta actividad es aplicar el teorema de la desigualdad triangular a situaciones de la vida real.

1. Se reparte la Hoja de Trabajo # 5 y se discuten las instrucciones con los participantes.

Instrucciones: Lee cuidadosamente la situación, observa el diagrama y contesta las preguntas.

2. En grupo grande se discutirá la Hoja de Trabajo #5.

Situación: Laura camina todos los días de clases desde su casa hasta la escuela y viceversa. Ella quisiera que hicieran un camino nuevo atravesando el bosque. Su madre no entiende por qué Laura quiere este camino nuevo, pues ella piensa este camino será más largo que el otro camino.

Preguntas:

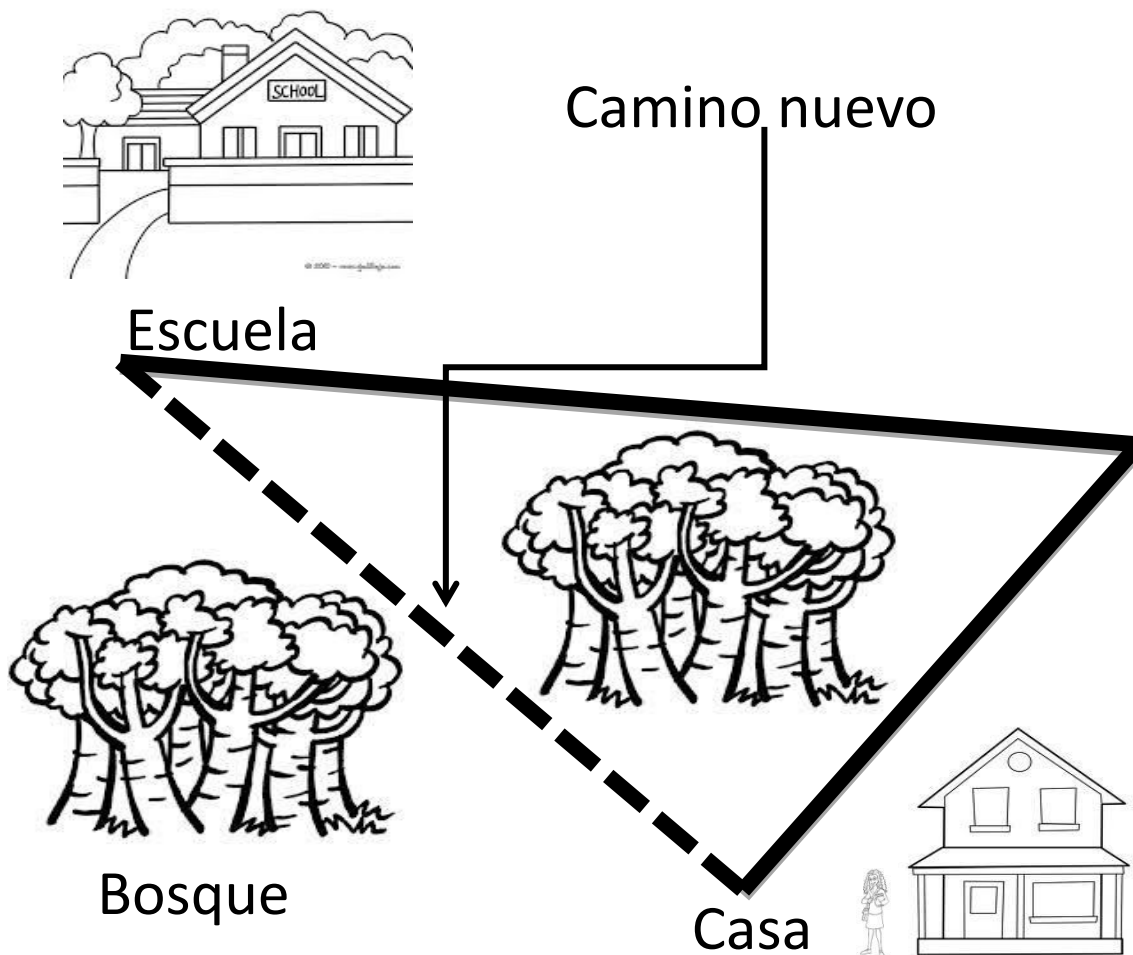
1. En un triángulo, ¿Qué longitud es mayor, el lado más largo o la suma de los dos lados más cortos? Explica. (El teorema de la desigualdad triangular nos dice que siempre la suma de dos lados cualesquiera siempre es mayor que el tercer lado.)
2. Si la distancia que recorre Laura de su casa a la escuela es 800 metros y 1,200 metros respectivamente. ¿Cuáles crees tú pueden ser las posibles distancia del nuevo camino? Explica (La distancia del nuevo camino es una medida entre 400 metros y 2,000 metros)
3. ¿Quién tiene la razón? Explica. (Laura tiene la razón, porque el primer camino recorre 2,000 metros y en el segundo camino es una distancia menor a 2,000 aun que no se sepa la distancia exacta)

Nota: Si lo desea solicite a los participantes elaboren una situación de la vida real donde puedan aplicar el teorema de desigualdad triangular.

Hoja de trabajo #5 “El camino más corto”

Instrucciones: Lee cuidadosamente la situación, observa el diagrama y contesta las preguntas.

Situación: Laura camina todos los días de clases desde su casa hasta la escuela y viceversa. Ella quisiera que hicieran un camino nuevo atravesando el bosque. Su madre no entiende por qué Laura quiere este camino nuevo, pues ella piensa este camino será más largo que el otro camino.



Preguntas:

1. En un triángulo, ¿Qué longitud es mayor, el lado más largo o la suma de los dos lados más cortos? Explica.
2. Si la distancia que recorre Laura de su casa a la escuela es 800 metros y 1,200 metros respectivamente. ¿Cuáles crees tú pueden ser las posibles distancia del nuevo camino? Explica.
3. ¿Quién tiene la razón? Explica.

ACTIVIDAD #6: PROGRAMANDO TRIÁNGULOS

(HOJA DE TRABAJO # 6)

El objetivo de esta actividad es crear un programa en la calculadora TI-84 para determinar si tres longitudes cualesquiera forman un triángulo.

1. Se reparte la Hoja de Trabajo # 6 y se discuten las instrucciones con los participantes.

Instrucciones:

- Utiliza la calculadora TI-84 Plus para crear un programa que determine que longitudes forman un triángulo y cuáles no forman un triángulo.
- Oprime la tecla [PRGM].
- Desplázate hasta NEW y oprime ENTER.
- Escribe los siguientes comandos en la calculadora:

(los comandos se encuentran en la tecla de [PRGM])

```
PROGRAM:TRIANGULO
: Input A
: Input B
: Input C
: Disp "SIDES =" , A, B, C
: If A+B≤C or A+C≤B or B+C≤A
: THEN
: Disp "NO TRIANGULO"
: Else
: Disp "TRIANGULO EXISTE"
: Stop
```

- Prueba tu nuevo programa para identificar triángulos dados tres longitudes.

2. En grupo grande se discutirá la Hoja de Trabajo #6.

Preguntas:

¿Qué te parece este tipo de programación? Explica tu respuesta

¿Crees que es pertinente para los estudiantes? Explica.

Nota: Motive la reflexión de sus participantes, es importante que comprendan que las calculadoras funcionan porque detrás de cada tecla hay una programación que le permite realizar cada algoritmo. Es importante motivar a los estudiantes a este tipo de programación, pues todavía hay un mundo de cosas por realizar en la programación.

Hoja de trabajo #6
“Programando triángulos”

Instrucciones:

1. Utiliza la calculadora TI-84 Plus para crear un programa que determine que longitudes forman un triángulo y cuáles no forman un triángulo.
2. Oprime la tecla [PRGM].
3. Desplázate hasta NEW y oprime ENTER.
4. Escribe los siguientes comandos en la calculadora:
(los comandos se encuentran en la tecla de [PRGM])

```
PROGRAM:TRIANGULO
: Input A
: Input B
: Input C
: Disp "SIDES =", A, B, C
: If A+B≤C or A+C≤B or B+C≤A
:THEN
:Disp "NO TRIANGULO"
:Else
:Disp "TRIANGULO EXISTE"
:Stop
```

5. Prueba tu nuevo programa para identificar triángulos dados tres longitudes.

Preguntas:

¿Qué te parece este tipo de programación? Explica tu respuesta

¿Crees que es pertinente para los estudiantes? Explica.

CIERRE

ACTIVIDAD CIERRE: BUSCANDO ERRORES

El objetivo de esta actividad es resumir todos los teoremas discutidos en la capacitación mediante la aplicación de cada uno de ellos en problemas de ejecución.

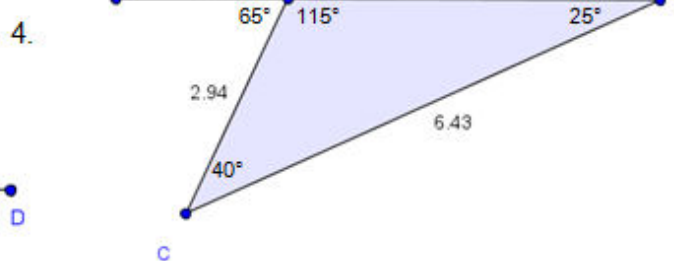
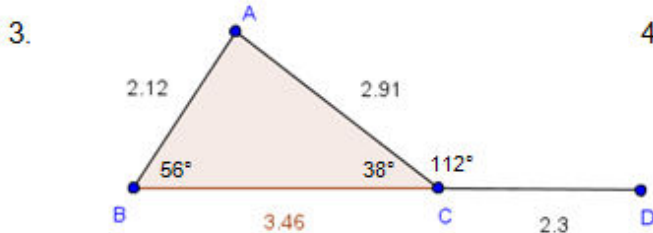
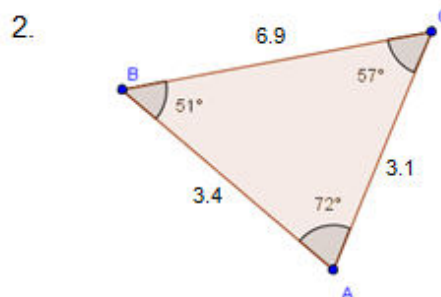
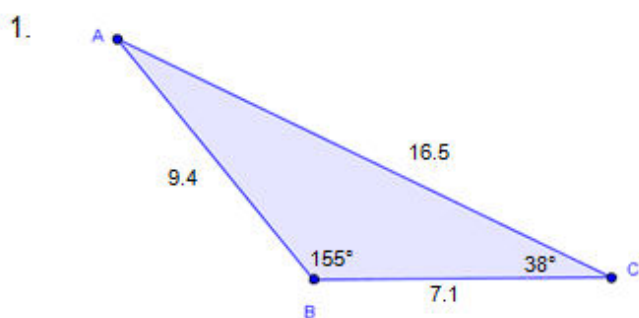
1. Se reparte la actividad de cierre y se discuten las instrucciones con los participantes.
Instrucciones: Utiliza los tres teoremas demostrados durante la capacitación, para encontrar los errores en las construcciones de los siguientes triángulos. En cada caso indica cual es el error y en que teorema te apoyas.

Contestaciones

1. Error en la medida de los ángulos. (Teorema de la suma de los ángulos)
Error en la medida de los lados. (Teorema de la desigualdad triangular)
2. Error en la medida de los lados. (Teorema de la desigualdad triangular)
3. Error en la medida del ángulo exterior. (Teorema del ángulo exterior)
4. No tiene error. Cumple con los tres teoremas.

Hoja de Trabajo Cierre
“Buscando errores”

Instrucciones: Utiliza los tres teoremas demostrados durante la capacitación, para encontrar los errores en las construcciones de los siguientes triángulos. En cada caso indica cual es el error, en que teorema te apoyas y explica tú argumento.



5. Reflexionarán acerca de los aprendizajes en la capacitación como *assessment* final.
6. Administrarán la pos prueba y la recogerán.
7. Discutirán la pos prueba con los participantes
8. Completarán la hoja de reacción evaluativa de la capacitación.

BIBLIOGRAFÍA

Departamento de Educación de Puerto Rico (2007). Estándares de Contenido y Expectativas de Grado: Programa de Matemáticas. San Juan, PR: Autor

Matemáticas 2. ¡MIDIENDO LOS ÁNGULOS INTERNOS DE UN TRIÁNGULO!; Prof. Refugio Herrera Zapata

T.2.G.2 Triangle Inequality Theorem; Jerry Haynes

Alacima 2009, Actividad conociendo el triángulo; Mayra Alonso

Geometría integración, aplicaciones y conexiones, McGrawHill 2000; Gail F. Burrill