

## TRANSFORMACIONES: TRASLACIÓN, REFLEXIÓN Y ROTACIÓN

### GUÍA DEL MAESTRO

**Autor:** Dr. Edwin Morera González

**Materia:** Matemáticas **Nivel:** 10-12.

**Conceptos Principales:** Traslaciones, reflexiones y rotaciones.

**Conceptos Secundarios:** Plano Cartesiano y eje de simetría.

**Conocimiento previo:** Gráficas de funciones, función y función 1-1.

**Objetivos específicos:**

Durante la actividad el participante:

1. Define los siguientes conceptos:
  - a. Reflexión
  - b. Traslación
  - c. Rotación
2. Determina la recta de reflexión, dados un punto y su imagen de reflexión.
3. Determina la reflexión, sobre una recta dada, de:
  - a. Un punto
  - b. Un segmento
  - c. Un triángulo
  - d. Cualquier otra figura
4. Cotejará que la longitud de un segmento y la de su imagen son iguales, tanto en una reflexión, una traslación como en una rotación.
5. Cotejará que la medida de un ángulo y la de su imagen son iguales, tanto en una reflexión, una traslación como en una rotación.
6. Determinará la traslación, con respecto a dos rectas paralelas dadas, de:
  - a. Un punto
  - b. Un segmento
  - c. Un triángulo
  - d. Cualquier otro polígono
7. Determinará la rotación, con respecto a dos rectas no paralelas dadas, de:
  - a. Un punto
  - b. Un segmento
  - c. Un triángulo
  - d. Cualquier otro polígono
8. Identificará el punto de rotación, dado un segmento y su imagen.
9. Identificará el punto de rotación, dado un triángulo y su imagen.

10. Identificará el punto de rotación, dada una figura y su imagen.
11. Clasificará las distintas simetrías que exhibe una gráfica dada.
12. Determinará si la gráfica de una función dada es simétrica con respecto al eje de y, al origen o si ésta no tiene ninguno de estos dos tipos de simetría.
13. Determinará si una función dada es par, impar o ninguna de ellas.

**Estándares, Expectativas e Indicadores por Grado:**

**ESTÁNDAR DE CONTENIDO 3: GEOMETRÍA**

**El estudiante es capaz de identificar formas geométricas, analizar sus estructuras, características, propiedades y relaciones para entender y descubrir el entorno físico.**

**Séptimo**

**Relaciona y aplica las transformaciones rígidas.**

**G.TS.7.13.1** Describe el efecto de transformaciones rígidas (traslación, reflexión respecto a líneas verticales u horizontales, rotación respecto al origen y composiciones simples) en figuras en el plano de coordenadas.

**G.TS.7.13.2** Utiliza transformaciones rígidas para identificar las partes correspondientes de figuras congruentes.

**Noveno**

**5.0 Identifica figuras congruentes y justifica estas congruencias estableciendo condiciones suficientes y hallando las transformaciones que preservan la congruencia entre las figuras. Resuelve problemas que involucran la congruencia en una variedad de contextos.**

**G.TS.9.5.1** Analiza figuras en términos de sus simetrías por medio de los conceptos reflexión, rotación y traslación; y una combinación de éstas.

**G.FG.9.5.2** Compara y contrasta la igualdad, la congruencia y la semejanza.

**G.FG.9.5.3** Identifica, contrasta, diferencia y aplica las condiciones suficientes para la congruencia de triángulos (LLL, LAL, ALA, AAL, HL).

**G.TR.9.5.4** Utiliza la geometría de coordenadas y las transformaciones rígidas (reflexiones, traslaciones y rotaciones) para establecer la congruencia de figuras.

**6.0 Identifica y aplica las transformaciones de figuras en el plano de coordenadas y discute los resultados de estas transformaciones.**

**G.TS.9.6.1** Representa traslaciones, reflexiones respecto a una línea, rotaciones y dilataciones (centradas en el origen) de objetos en el plano de coordenadas por medio de trazos, coordenadas, notación de funciones y matrices, y explica los efectos de estas transformaciones.

**G.TS.9.6.2** Reconoce e identifica las partes correspondientes de figuras congruentes y semejantes luego de una transformación.



## **Trasfondo: Transformaciones**

Las transformaciones es un tema importantísimo en las matemáticas, las ciencias, la ingeniería, la arquitectura, la fotografía, en las artes y en un sinnúmero de otros campos. Entre éstas, están las reflexiones, las traslaciones y las rotaciones, que tienen ciertas propiedades que no toda transformación posee y que discutiremos en el desarrollo de este módulo. Además, estas transformaciones son conceptos básicos e indispensables en el entendimiento de las matemáticas tanto elementales como avanzadas. La cantidad de aplicaciones de este tema es inmensa.

### **Glosario:**

**Función 1-1:** Una función  $y = f(x)$  es 1-1 si para todo  $x$ ,  $y$  en el dominio de la función con  $x \neq y$  tenemos que  $f(x) \neq f(y)$ .

**Transformación:** Una transformación en el plano es una correspondencia uno a uno entre los Puntos del plano entre sí. Si un punto  $P$  se transforma en un punto  $P'$  a este último se le conoce como la imagen y a  $P$  se le llama la preimagen.

**Reflexión:** Sea  $\ell$  una recta en un plano. Una **reflexión** sobre la recta  $\ell$  es una transformación que proyecta cada punto  $P$  del plano sobre otro punto  $P'$  del mismo plano de manera que:

- Si  $P$  está en  $\ell$ , entonces  $P' = P$
- Si  $P$  no está en  $\ell$ , entonces  $\ell$  es la mediatriz del  $\overline{PP'}$ .

**Mediatriz:** La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento y que pasa por el punto medio de éste.

**Traslación:** Sea  $P$  un punto en el plano y  $\ell_1$  y  $\ell_2$  dos líneas paralelas en el mismo plano. Una traslación es la composición de dos reflexiones sobre dichas rectas, de la forma siguiente: primero se refleja el punto  $P$  sobre la línea  $\ell_1$  y luego se refleja esta imagen sobre la línea  $\ell_2$ .

**Rotación:** Sea  $P$  un punto en el plano y  $\ell_1$  y  $\ell_2$  dos líneas no paralelas en el mismo plano. Una rotación es la composición de dos reflexiones sobre dichas rectas, de la forma siguiente: primero se refleja el punto  $P$  sobre la línea  $\ell_1$  y luego se refleja esta imagen sobre la línea  $\ell_2$ . A punto de

intercepción de las dos rectas se le conoce como **centro de rotación**.

**Simetría con respecto a una línea:** Una figura plana es simétrica con respecto a una línea  $l$  si la reflexión de la figura con respecto a  $l$  es la misma figura. A recta  $l$  se le conoce como eje de simetría.

**Simetría con respecto a un punto:** Una figura plana es simétrica con respecto a un punto  $P$  si al rota la figura  $180^\circ$  con centro de rotación en  $P$ , la figura que se obtienen es la misma.

**Materiales y equipo:**

1. Papelotes
2. Marcadores
3. Cinta adhesiva
4. Reglas (una para cada participante)
5. Compas (uno para cada participante)
6. Mira para cada participante
7. Calculadoras gráficas *TI-84 Plus*
8. Computadora
9. Proyector digital (*Infocus*)

**Proceso Educativo:**

- I. Pre y Pos prueba
  1. Se evaluará el conocimiento de los participantes antes de la capacitación con la Preprueba y el conocimiento después con la Posprueba (documentos adjuntos).
- II. Assessment Continuo
  1. Obviamente la preprueba y la posprueba son parte del assessment de la capacitación. Es la primera ayuda al capacitador para tomar decisiones acerca del conocimiento que tiene el participante del tema y de las próximas actividades que llevará a cabo. Mientras la posprueba ayuda al capacitador a tomar decisiones de la necesidad de re enseñanza en próximas capacitaciones.

2. Las hojas de trabajo, el capacitador las utilizará como assessment. Los participantes estarán cotejando su aprendizaje en la medida que se discutan las mismas en grupo grande. Además, el capacitador las corrige y las utilizarlas para tomar decisiones.
3. Durante todas las actividades el capacitador estará haciendo observaciones mientras se mueve entre los grupos, cuando los participantes discuten en grupo y cuando presentan sus respuestas a las preguntas. Esto le permite hacer conclusiones del aprendizaje de éstos y los próximos pasos a seguir.

### **Primera parte**

#### **I. Inicio:** *Explorando las concepciones previas*

1. La actividad está diseñada para indagar el conocimiento que tienen los participantes acerca de las transformaciones.
  - i. Se dividen los maestros en cuatro o cinco grupos.
  - ii. El capacitador le pide a cada grupo que, en un papelote, conteste las siguientes preguntas:
    1. ¿Qué es una transformación en el plano?
    2. ¿Qué es una reflexión?
    3. ¿Qué es una traslación?
    4. ¿Qué es una rotación?
  - iii. Cada grupo presenta sus contestaciones al grupo grande. El capacitador y los participantes no pasarán juicio sobre lo presentado. El capacitador estará observando las contestaciones e identificará concepciones erróneas, si las hay, para luego, a través de la capacitación, hacer énfasis en las mismas y corregirlas. En el cierre de la capacitación los participantes volverán a revisar las

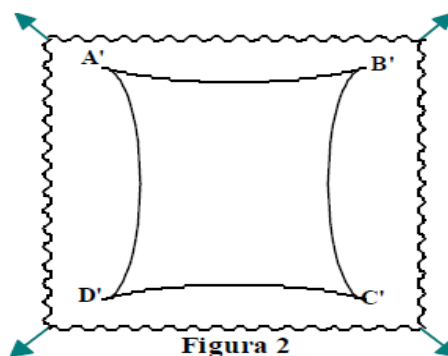
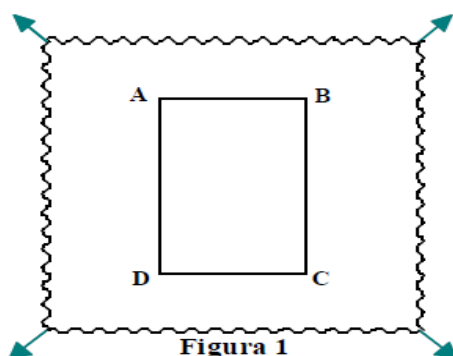
contestaciones de las preguntas y harán los arreglos pertinentes. De esta forma tendrán la oportunidad de percatarse de los posibles errores y corregirlos, mientras el capacitador tendrá un assessment final.

## II. Desarrollo

### **Actividad 1: Transformación (Reflexión)**

1. El capacitador plantea la siguiente pregunta: **¿Qué es una función 1-1 (correspondencia 1-1)?**

Permite que los participantes discutan y dirige la discusión hasta que los participantes define función 1-1 (correspondencia 1-1) de una forma equivalente a la siguiente: **Una función  $y = f(x)$  es 1-1 si para todo  $x$ , y en el dominio de la función con  $x \neq y$  tenemos que  $f(x) \neq f(y)$ .**



2. El capacitador plantea la siguiente situación:

**Suponga que se dibuja un rectángulo sobre una lámina de goma que se estira en dirección hacia donde indican las flechas (vea figura 1). El resultado lo podemos observar en la figura 2, donde a los vértices del rectángulo ABCD le corresponden los vértices identificados por A', B', C' y D' (figura 2).**

Pregunta: ¿A cada punto del rectángulo ABCD le corresponde un punto en el rectángulo A'B'C'D'? El capacitador permite que los participantes discutan y dirige la misma. Contestación: Sí, a cada punto P en el rectángulo ABCD le corresponde un punto P' en el rectángulo A'B'C'D'. El capacitador explica que se podría generalizar y decir que a cada punto P en el plano le corresponde un punto P' en el mismo plano.

3. El capacitador define transformación (ver glosario). Pregunta: ¿El ejemplo anterior es una transformación? De ser la contestación afirmativa, ¿por qué? El capacitador permite que los participantes discutan y dirige la misma. Contestación: Sí, el ejemplo anterior es un ejemplo de una transformación en donde cada punto P (preimagen) en el plano le corresponde un punto P' (imagen) en el plano.
4. El capacitador le da a cada participante una Mira y menciona que es un ejemplo de lo que en la literatura se conoce como el **espejo mágico de Escher**. Le pide a los participantes que dibujen triángulo ABC y que coloque la Mira al lado del triángulo como muestra la figura 3.

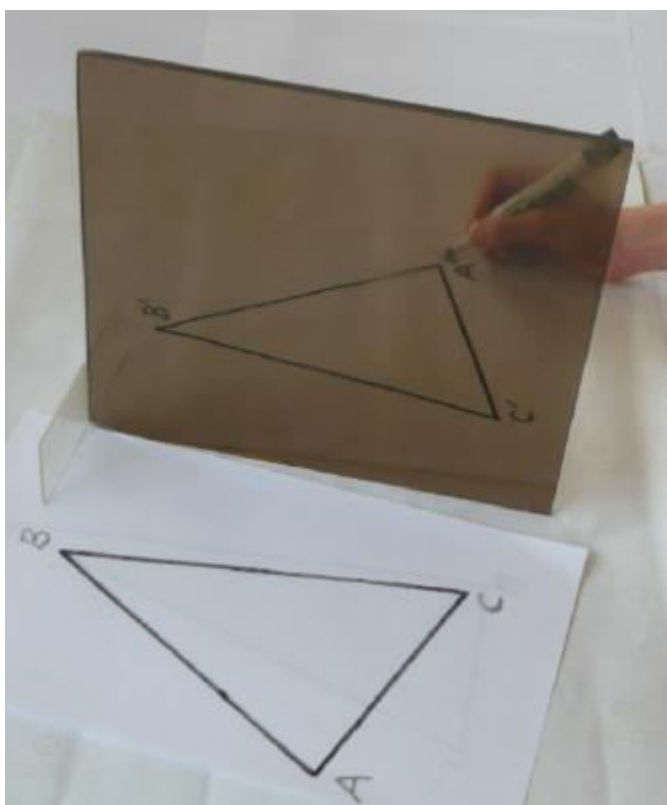


figura 3

El capacitador dirige la discusión para que los participantes noten que a cada punto del plano ABC le podemos hacer corresponder un punto del plano que llamaremos  $A'B'C'$  que es reflejo a través del espejo. Pregunta: ¿Esto es un ejemplo de una transformación? Contestación: Sí.

5. El capacitador define reflexión (ver glosario). El capacitador explica que la recta  $l$  se conoce como recta de reflexión y que cuando usamos la Mira la colocamos sobre la recta de reflexión (el capacitador debe mostrarlo).
6. El capacitador utiliza la figura 4 para mostrar las siguientes afirmaciones que surgen de la definición:



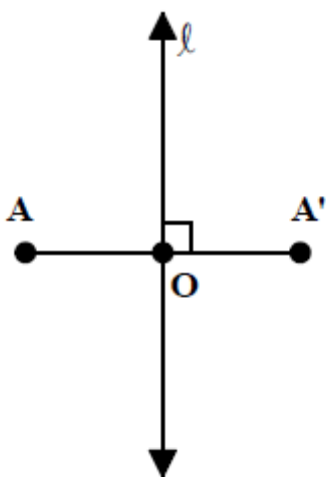


figura 4

- i. La distancia entre un punto y la recta de reflexión es igual a la distancia entre la recta y su imagen, esto es,  $AO = A'O$ .
  - ii. Los cuatro ángulos formados entre la recta  $l$  y el segmento  $\overline{AA'}$  son rectos (miden  $90^\circ$ ).
  - iii. La distancia entre el punto y su imagen es el doble de la distancia entre el punto y la recta de reflexión.
7. El capacitador plantea la siguiente situación: ***Dado un punto A y una recta l, ¿cómo hallamos la reflexión de A sobre l?*** El capacitador le pide a los participantes que dibujen una recta  $l$  y un punto A en un lado de  $l$ . Luego los participantes hallarán el reflejo de A utilizando la Mira y lo denominarán A'. Luego el capacitador le muestra cómo hallar la reflexión del punto A utilizando regla y compás (en geometría euclidiana una regla es cualquier aparato que me permita trazar rectas y un compás cualquier aparato que te permita trazar círculos). Paso:
- i. Con el compás trace un arco con centro en el punto A y que corte la recta  $l$  en

dos puntos (ver figura 5).

- ii. Trace, hacia el lado de  $l$  donde no está  $A$ , dos arcos adicionales, con el mismo radio que el primero, pero usando como centro los puntos de intersección del primer arco con la recta  $l$ .
- iii. La intersección de estos dos últimos arcos es la imagen de  $A$  que denominamos  $A'$ .

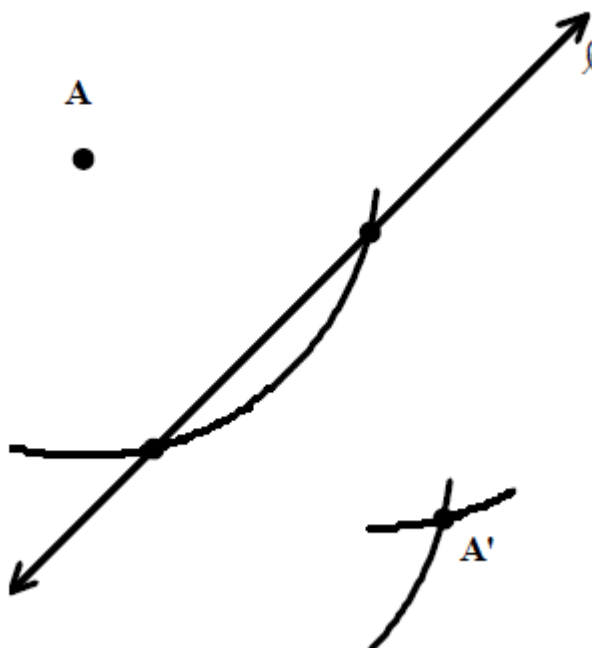


figura 5

8. El capacitador invita a los participantes para que tracen el reflejo de puntos utilizando reglas y compás.
9. El capacitador plantea la siguiente situación: **Dado el segmento  $\overline{AB}$  y la recta  $l$ , hallar la reflexión del segmento con respecto a  $l$ .** El capacitador permite que los

participantes discutan y la dirige para que concluyan ***para hallar la reflexión del segmento sólo necesitamos hallar la imagen de los extremos (ver figura 6).***

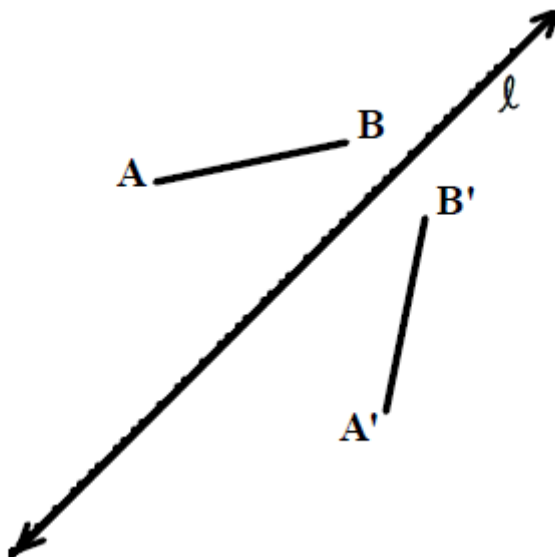


figura 6

Pregunta: ¿Cómo comparan las longitudes de estos segmentos? Contestación: son iguales.

10. El capacitador invita a los participantes para que hallen la reflexión de un segmento utilizando regla y compás.

11. El capacitador plantea la siguiente situación: ***Considere los puntos  $A(-2,1)$ ,  $B(2,5)$  y  $C(6,3)$  en el plano cartesiano, ¿cómo hallamos la reflexión del triángulo ABC con respecto al eje  $x$ ?*** El capacitador permite la discusión y la dirige para que concluyan ***solo tenemos que localizar estos puntos en el plano cartesiano, luego buscamos las reflexiones de los vértices y unimos estos puntos entre sí. La imagen del triángulo ABC es el triángulo A'B'C' (ver figura 7).***

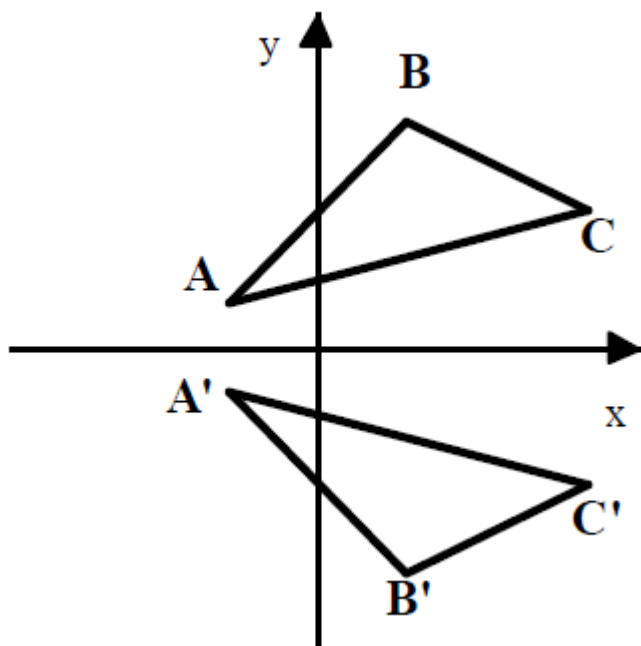


figura 7

Pregunta: ¿Qué podemos afirmar acerca de estos dos triángulos? Contestación: Son congruentes.

12. El capacitador discute las propiedades de la reflexión:

- i. Preservan colinealidad (la imagen de un segmento es otro segmento).
- ii. Preserva intermediación de los puntos (si A,B y C son tres puntos colineales y B está entre A y C, entonces B' está entre A' y C').
- iii. Preservan distancias (la longitud de un segmento y su imagen son iguales).
- iv. Preservan medida de ángulo ( $m\angle ABC = m\angle A'B'C'$ ).
- v. Preservan el perímetro y el área de polígonos.
- vi. Cualquier polígono, bajo una reflexión, es otro polígono congruente a éste.
- vii. Las reflexiones no preservan orientación.

13. El capacitador reparte la Hoja de Trabajo 1 (HT1) y discute con los participantes las

instrucciones. Mientras los grupos resuelven los problemas el capacitador contesta preguntas y se asegura que los grupos trabajen colaborativamente. (Las contestaciones se encuentran en el documento Hoja de Trabajo 1: Soluciones)

14. El capacitador discute los resultados de la HT1 en grupo grande.

### **Actividad 2: Transformaciones (Traslaciones)**

1. El capacitador le pide a los participantes que tracen dos líneas paralelas ( $\ell_1$  y  $\ell_2$ ) localicen un punto P (como muestra la figura 8).

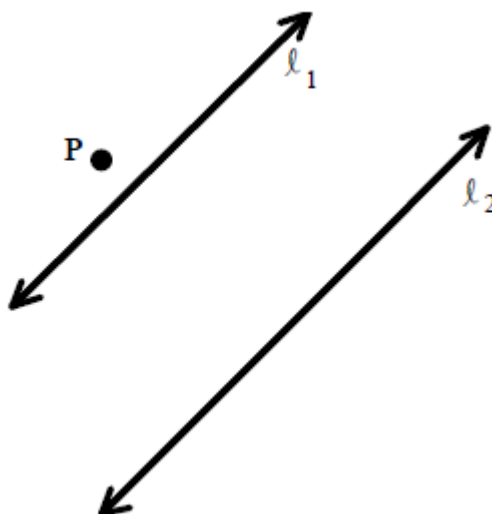


figura 8

El capacitador le indica a los participantes que con la Mira refleje el punto P a través de  $\ell_1$  para obtener la imagen  $P_1$  (ver figura 9).

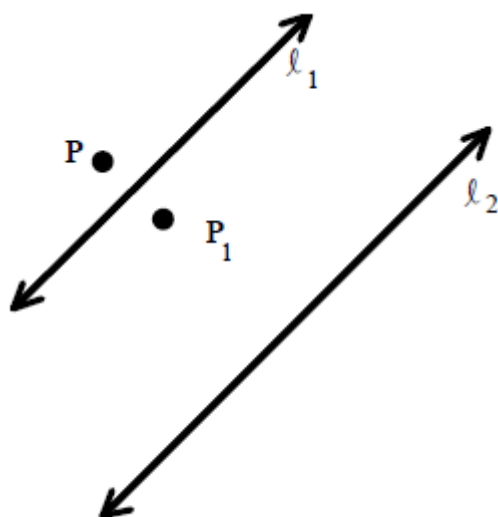


figura 9

Luego reflejan el punto  $P_1$  sobre la recta  $l_2$  para obtener  $P'$  (ver figura 10).

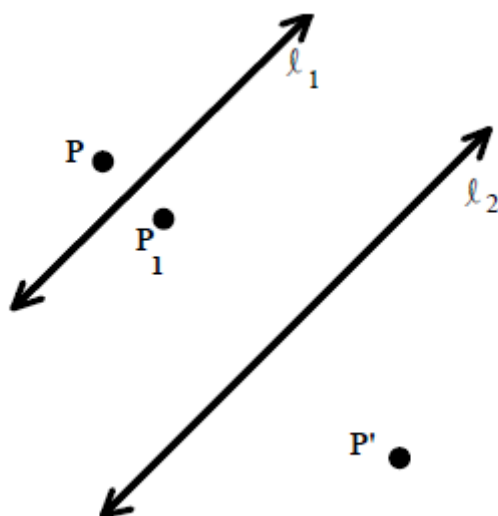


figura 10

2. El capacitador explica que lo que acabamos de hacer se conoce como traslación y define el concepto (ver glosario).
3. El capacitador hace las siguientes observaciones y las muestra utilizando la figura 8:

- a. Los puntos  $P$ ,  $P_1$  y  $P'$  son colineales.
  - b. La línea que contiene a  $P$ ,  $P_1$  y  $P'$  es perpendicular tanto a la línea  $\ell_1$  como a la línea  $\ell_2$ .
  - c. La distancia entre  $P$  y  $\ell_1$  es igual a la distancia entre  $P_1$  y  $\ell_1$ , y la distancia entre  $P_1$  y  $\ell_2$  es igual a la distancia entre  $P'$  y  $\ell_2$ .
  - d. La distancia entre  $P$  y  $P'$  es el doble de la distancia entre las rectas.
4. El capacitador plantea la siguiente situación y anima a los participantes para que la resuelvan: **En la figura 9 que se muestra a continuación, halle la traslación del  $\overline{AB}$  a través de las líneas  $\ell_1$  y  $\ell_2$ , reflejando primero sobre  $\ell_1$  y luego sobre  $\ell_2$ .**

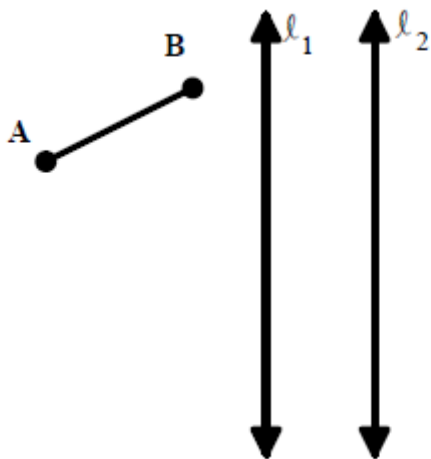


figura 9

Contestación:

- Primero se refleja el  $\overline{AB}$  a través de la línea  $\ell_1$  para obtener el  $\overline{CD}$  (ver figura 10).

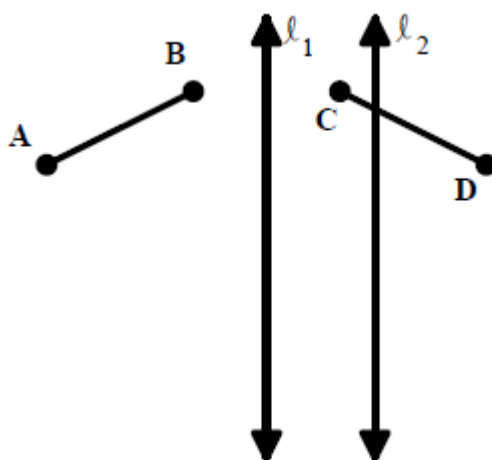


figura 10

- Luego se refleja el  $\overline{CD}$  a través de la línea  $\ell_2$  para obtener el  $\overline{A'B'}$  (ver figura 11).



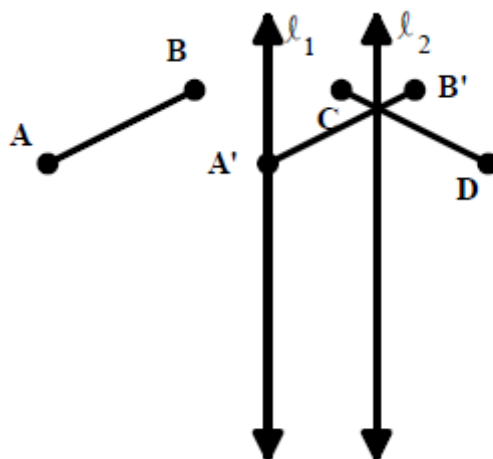


figura 11

5. El capacitador le muestra a los participantes que la distancia entre A y A' es igual a la distancia entre B y B' y que es igual al doble de la distancia entre las líneas. Por tal tanto, el  $\overline{AB}$  se trasladó el doble de la distancia entre las líneas.
6. El capacitador plantea la siguiente situación y anima a los participantes a resolverla:

**Considere el  $\triangle ABC$  en la figura 12 y suponga que el punto marcado como A' es la traslación del punto A. Halle la traslación del  $\triangle ABC$ .**

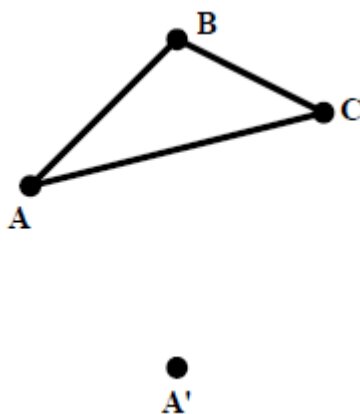


figura 12

Contestación:

- Como las traslaciones se mueven perpendiculares a las rectas, los movimientos de los puntos hacia sus imágenes son paralelos entre si y de la misma magnitud. Lo primero que hacemos es trazar el  $\overline{AA'}$  y luego construir dos segmentos paralelos a este, uno comenzando en B y otro comenzando en C (ver figura 13). Los otros extremos de los segmentos los denotaremos por B' y C' respectivamente.

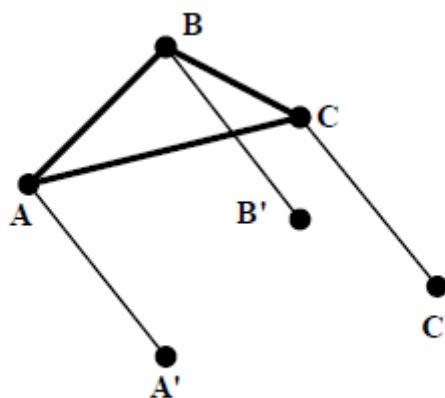


figura 13

- Se procede a conectar los puntos A', B' y C' (ver figura 14).

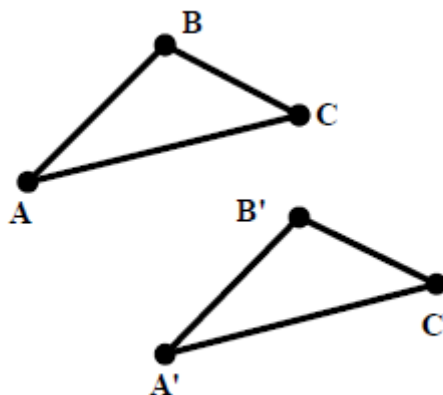


figura 14

7. El capacitador discute las propiedades de la traslación.
  - a. Conserva colinealidad (la imagen de un segmento es otro segmento).
  - b. Preserva intermediación de puntos razón (Si A, B y C son puntos colineales con B entre A y C, entonces B' está entre A' y C'.
  - c. Preserva distancia (la distancia entre A y B es igual a la distancia entre sus imágenes A' y B'.
  - d. La imagen de cualquier polígono, bajo una traslación, es otro polígono congruente a éste.
  - e. Las traslaciones preservan orientación.
  - f. Bajo una traslación, todos los puntos recorren la misma distancia y en la misma dirección.
8. El capacitador reparte la Hoja de Trabajo 2 (HT2) y discute con los participantes las instrucciones. Mientras los grupos resuelven los problemas el capacitador contesta preguntas y se asegura que los grupos trabajen colaborativamente. (Las contestaciones se encuentran en el documento Hoja de Trabajo 2: Soluciones)
9. El capacitador discute los resultados de la HT2 en grupo grande.

### ***Actividad 3: Traslaciones (Rotaciones)***

1. El capacitador le pide a los participantes que tracen dos líneas no paralelas ( $\ell_1$  y  $\ell_2$ )  
  
localicen un punto P (como muestra la figura 15).

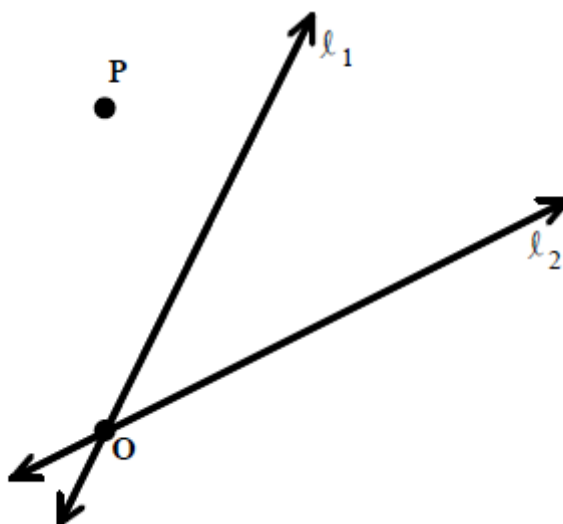


figura 15

El capacitador le indica a los participantes que con la Mira refleje el punto P a través de  $l_1$  para obtener la imagen  $P_1$  (ver figura 16).

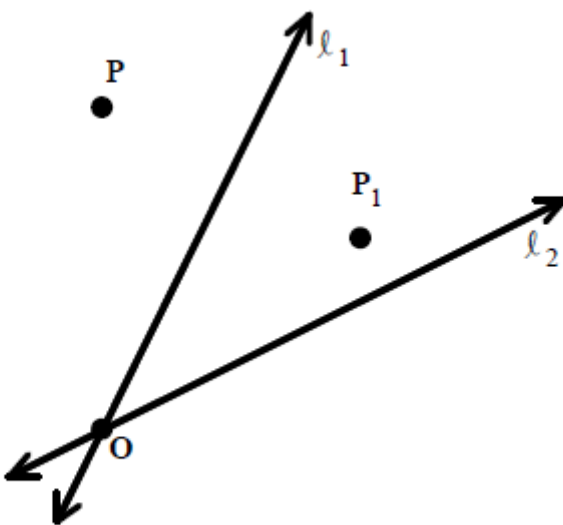


figura 16

Luego reflejan el punto  $P_1$  sobre la recta  $l_2$  para obtener  $P'$  (ver figura 17).

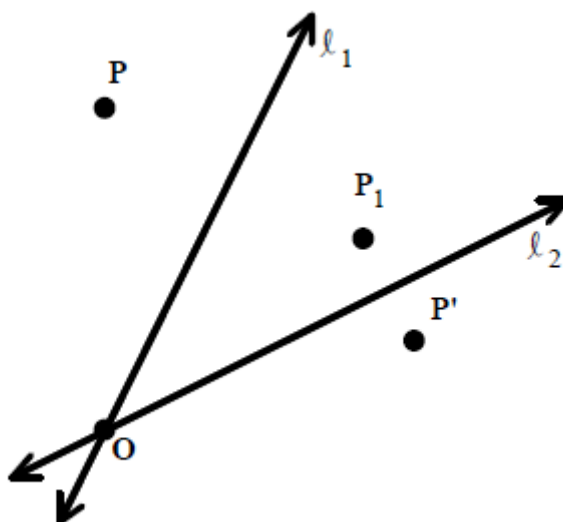


figura 17

2. El capacitador explica que lo que acabamos de hacer se conoce como rotación y define el concepto (ver glosario).
3. El capacitador hace las siguientes observaciones y las muestra utilizando la figura 18:  
Si  $\Phi$  representa el ángulo entre las líneas  $l_1$  y  $l_2$ , utilizando la congruencia de triángulos se puede demostrar,
  - a. Los puntos  $OP = OP_1 = OP'$  son colineales.
  - b.  $m(\angle POP') = 2m(\angle \Phi)$

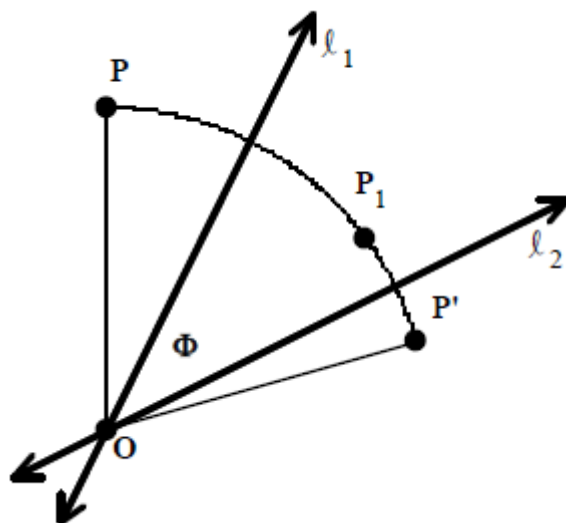


figura 18

Es claro que una rotación es una doble reflexión a través de dos líneas no paralelas. El **centro de rotación** es el punto de intercepción de las dos líneas y el ángulo de rotación es  $2\Phi$ .

4. El capacitador plantea la siguiente situación y anima a los participantes para que la resuelvan: **En la figura 19 que se muestra a continuación, se muestran dos rectas perpendiculares y una figura. Halle la rotación de la figura a través de las líneas m y n**, reflejando primero sobre m y luego sobre n.

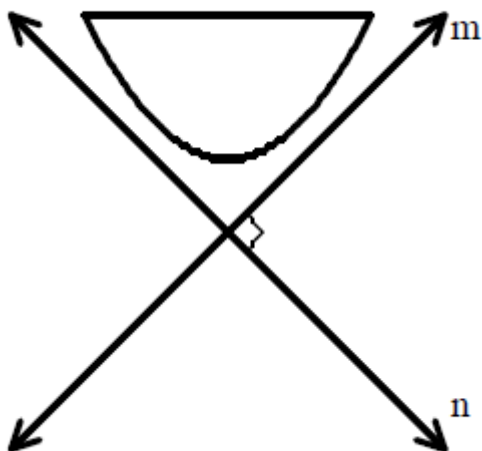


figura 19

Contestación:

- Primero se refleja la figura a través de la recta m (ver figura 20).

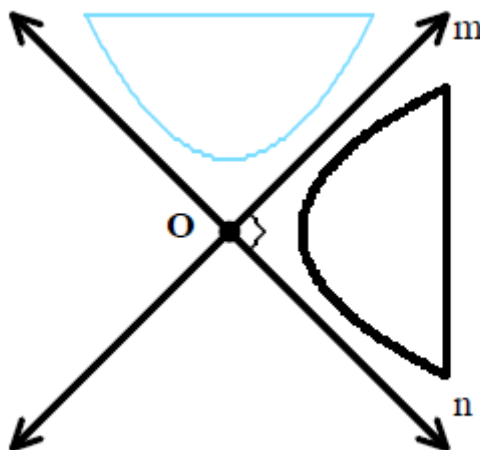


figura 10

- Luego se refleja a través de la línea n (ver figura 21).

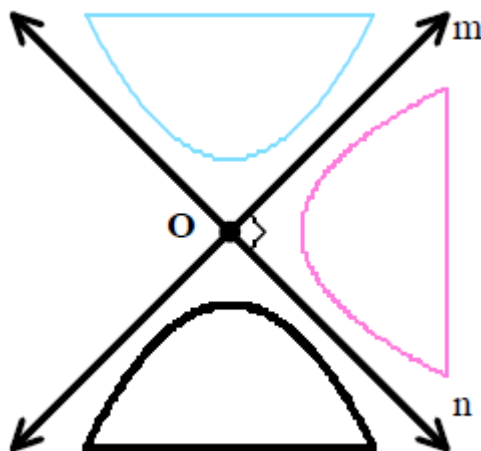


figura 21

Como las rectas son perpendiculares, la rotación tiene un ángulo de  $180^\circ$ , esto es, se rota media vuelta, donde el punto  $O$  es el centro de rotación.

5. El capacitador reparte la Hoja de Trabajo 3 (HT3) y discute con los participantes las instrucciones. Mientras los grupos resuelven los problemas el capacitador contesta preguntas y se asegura que los grupos trabajen colaborativamente. (Las contestaciones se encuentran en el documento Hoja de Trabajo 3: Soluciones)
6. El capacitador discute los resultados de la HT3 en grupo grande.

#### **Actividad 4: Simetrías**

1. El capacitador pregunta a los participantes ¿qué entienden cuando escuchan la palabra simetría?, podrían ofrecer ejemplos. Permite que los participantes discuten y dirige la discusión.
2. El capacitador define simetría con respecto a una línea y simetría con respecto a un



punto (ver glosario).

3. El capacitador pregunta ¿qué tipo de simetría exhibe un círculo? Y muestra la figura 22 para que los participantes discutan.

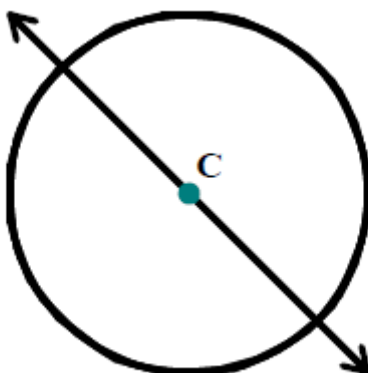


figura 22

Contestación: Observe que si trazamos una recta que contenga al centro del círculo, la reflexión del círculo con respecto a esa recta es el mismo círculo. Además, si rota el círculo con centro de rotación igual al centro del círculo, la imagen es el mismo círculo. Por lo tanto, un círculo es simétrico con respecto a cualquier recta que contenga su centro y también se simétrica con respecto a su centro.

4. El capacitador pregunta ¿es igual de simétrica una elipse que un círculo? Y muestra la figura 23 para que los participantes discutan.

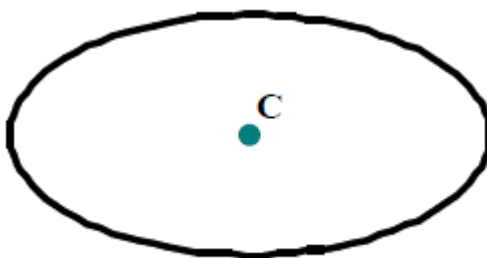


figura 23

Contestación: Si trazamos una recta que pase por C como ilustra la figura 24 el resultado es otra elipse distinta a la original, como muestra la figura 25.

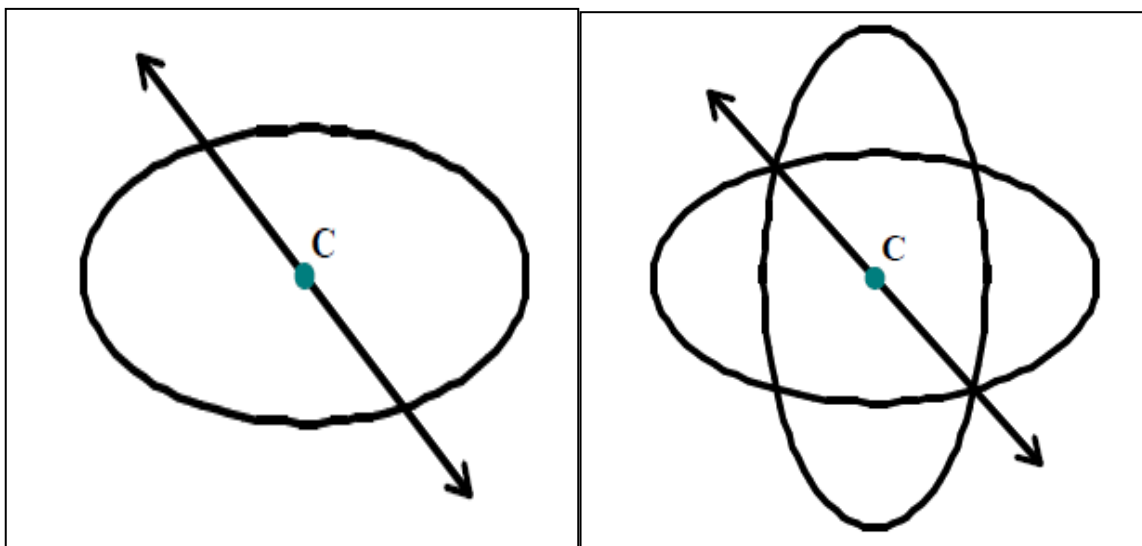


figura 24

figura 25

Sin embargo, la reflexión de la elipse con respecto a cualesquiera de las dos líneas que se ilustran en la figura 26 produce el mismo elipse. Además, si rotamos la elipse  $180^\circ$  con respecto a su centro, también obtenemos la misma elipse. Por lo tanto, la elipse tiene dos ejes de simetría y también es simétrica con respecto a su centro.

5. El capacitador explica que si la gráfica de una ecuación en dos variables es simétrica con respecto al eje x, como la ilustrada en la figura 26, y el punto  $(x,y)$  pertenece a la gráfica de ésta, entonces el punto  $(x,-y)$  también pertenece a la gráfica de la ecuación.

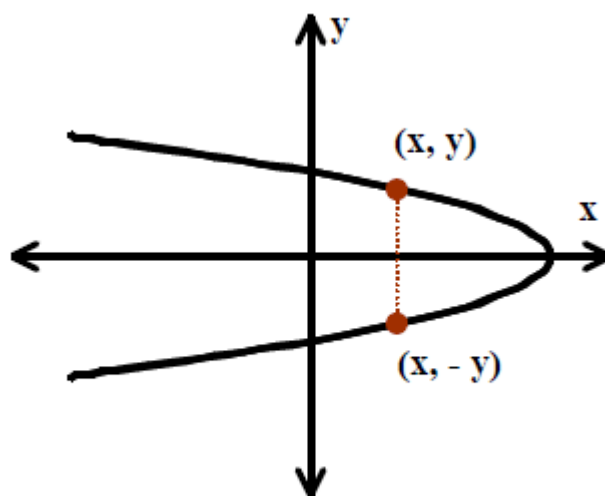


figura 26

Mientras, si la gráfica de una ecuación en dos variables es simétrica con respecto al eje  $y$ , como la ilustrada en la figura 27, y el punto  $(x,y)$  pertenece a la gráfica de ésta, entonces el punto  $(-x,y)$  también pertenece a la gráfica de la ecuación.

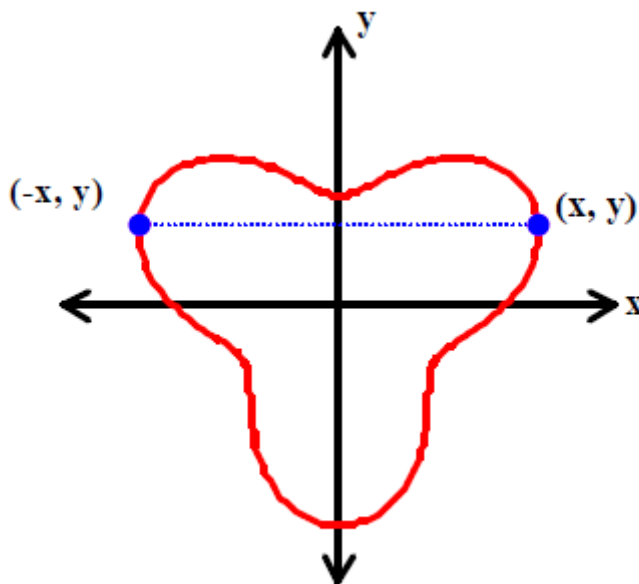


figura 27

Además, si la gráfica de una ecuación en dos variables es simétrica con respecto al

origen, como la ilustrada en la figura 28, y el punto  $(x,y)$  pertenece a la gráfica de ésta, entonces el punto  $(-x,-y)$  también pertenece a la gráfica de la ecuación.

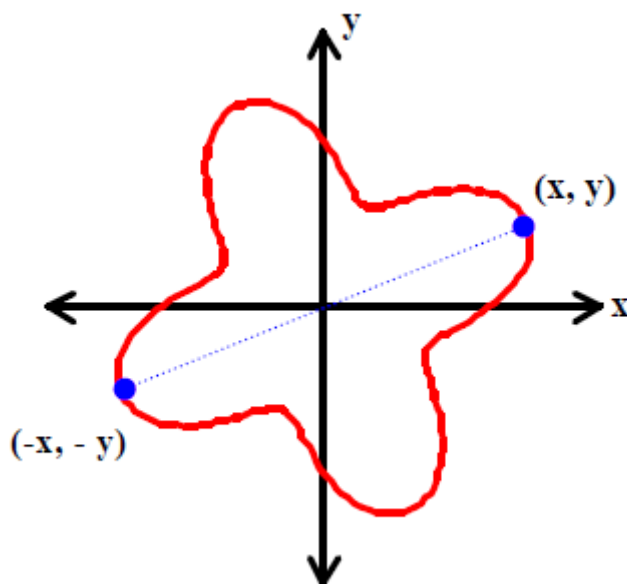


figura 28

A continuación resumimos cuando la gráfica de una ecuación en dos variables es simétrica.

Simetría	Definición	Ejemplo
Eje x	Siempre que las coordenadas del punto $(x,y)$ satisfacen la ecuación, entonces las coordenadas del punto $(x,-y)$ también satisfacen la ecuación.	Dada la ecuación $x = y^2$ . Notemos que al sustituir $-y$ en la variable $y$ obtenemos $x = (-y)^2 = y^2$ .

Eje y	Siempre que las coordenadas del punto (x,y) satisfacen la ecuación, entonces las coordenadas del punto (-x,y) también satisfacen la ecuación.	Dada la ecuación $y = x^2$ . Notemos que al sustituir $-x$ en la variable $x$ obtenemos $y = (-x)^2 = x^2$ .
Origen	Siempre que las coordenadas del punto (x,y) satisfacen la ecuación, entonces las coordenadas del punto (-x,-y) también satisfacen la ecuación.	Dada la ecuación $y = x^3$ . Notemos que al sustituir $-x$ en la variable $x$ y $-y$ en la variable $y$ obtenemos $-y = (-x)^3 = -x^3$ , lo que implica que $y = x^3$ .

6. El capacitador plantea el siguiente problema y anima a los participantes para que lo resuelvan: **Determine si la gráfica de la ecuación  $yx^2 + y = 4$  tiene alguna de las simetrías discutidas.**

Contestación:

*Simetría al eje x*, al sustituir  $y$  por  $-y$  en la ecuación obtenemos  $(-y)x^2 + (-y) = 4$ .

Notemos que al multiplicar toda la ecuación por  $-1$  obtenemos  $yx^2 + y = -4$ , que no es equivalente a la ecuación original, por lo tanto, no es simétrica con respecto al eje  $x$ .

*Simetría al eje y*, al sustituir  $x$  por  $-x$  en la ecuación obtenemos  $y(-x)^2 + y = 4$ . Notemos que  $(-x)^2 = x^2$ , así que obtenemos  $yx^2 + y = 4$ , por lo tanto, es simétrica con respecto al eje  $y$ .

*Simetría al origen*, al sustituir  $x$  por  $-x$  y  $y$  por  $-y$  en la ecuación obtenemos

$(-y)(-x)^2 + (-y) = 4$ . Notemos que al multiplicar toda la ecuación por  $-1$  obtenemos  $yx^2 + y = -4$ , que no es equivalente a la ecuación original, por lo tanto, no es simétrica con respecto al origen.

7. El capacitador reparte la Hoja de Trabajo 4 (HT4) y discute con los participantes las instrucciones. Mientras los grupos resuelven los problemas el capacitador contesta preguntas y se asegura que los grupos trabajen colaborativamente. (Las contestaciones se encuentran en el documento Hoja de Trabajo 4: Soluciones)
8. El capacitador discute los resultados de la HT4 en grupo grande.

### III Cierre

1. Cada grupo retoma los papelotes de los papelotes desarrollados en el inicio para reflexionar acerca de los aprendizajes en la capacitación (*assessment* final). Se le permite a los participantes que hagan los cambios que sean pertinentes. Se discute con los participantes los cambios propuestos y la razón por qué los hicieron.

**Bibliografía:**

Departamento de Educación (2011). *Estándares de Contenido y Expectativas de Grado: Programa de Matemáticas*.

Martes Pagán, Mariano (2010). *Transformaciones geométricas en el Plano (Reflexiones, Traslaciones y Rotaciones)*.

Moise, Edwin E. (1974). *Elementary geometry from an advanced standpoint, second edition*. Addison-Wesley, California.