Ecuaciones diferenciales de primer orden

Los cursos básicos de cálculo deferencial e integral tienen como objetivo principal que el estudiantes resuelva *ecuaciones diferenciales*. En este módulo repasaremos la resolución de ecuaciones diferenciales separables y lineales de primer orden, el tipo de ecuación diferencial más sencillo de resolver. Además, aplicaremos estas ecuaciones en la resolución de problemas de las ciencias naturales.

5.1 Ecuaciones diferenciales

Objetivos: Al finalizar el estudiante,

1. Reconocerá las ecuaciones diferenciales.
2. Determinará el orden de la ecuación diferencial.
3. Reconocerá las ecuaciones diferenciales separables de primer orden.
4. Reconocerá las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.
5. Resolverá ecuaciones diferenciales separables de primer orden.
6. Resolverá ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.
7. Resolverá problemas de las ciencias naturales en donde se aplican ecuaciones de este tipo.

Una ***ecuación diferencial*** es una ecuación que contiene una función desconocida *y = f(x)* y una o más de sus derivadas. Las ecuaciones diferenciales se clasifican por el ***orden*** de la derivada más alta que aparece en la ecuación. Por ejemplo, la ecuación

$$5\frac{d^3y}{dx^3} - 2x\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad (1)$$

es un ejemplo de una ecuación diferencial de ***tercer orden***, mientras que

$$2xy' + 4xy = 5 \qquad (2)$$

es una ecuación diferencial de ***primer orden***. Noten que en (1) utilizamos la notación de Leibniz mientras en (2) utilizamos la notación "prima". Tradicionalmente se prefiere la primera porque muestra con claridad la variable independiente.

Una solución de una ecuación diferencial es una función $y = f(x)$ suficientemente diferenciable, definida de manera explícita o implícita que, al sustituir en la ecuación diferencial, se reduce a una identidad sobre algún intervalo. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1: Demuestre que $y = x^2 - \frac{1}{3}e^{-3x}$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} - 2x = e^{-3x}. \qquad (3)$$

Solución: Notemos que la derivada de $y = x^2 - \frac{1}{3}e^{-3x}$ es $\frac{dy}{dx} = 2x + e^{-3x}$. Al sustituir en (3), obtenemos

$$\frac{dy}{dx} - 2x = e^{-3x}$$

Sustituir la derivada

$$2x + e^{-3x} - 2x = e^{-3x}$$

Unir términos semejantes y simplificar en el lado derecho de la ecuación.

$$e^{-3x} = e^{-3x}$$

Obtenemos una identidad.

Ejemplo de práctica 1: Demuestre que $y = \frac{1}{1+2e^{-x}}$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 1 - y.$$

La familia de todas las soluciones de una ecuación diferencial se denomina ***solución general***. Muchos problemas requieren que la solución satisfaga la condición $y = b$ cuando $x = a$, en donde se dan a y b. Tal condición se llama ***condición inicial*** y una función que satisface la ecuación diferencial y la condición inicial se denomina ***solución particular***.

Ecuaciones diferenciales separables de primer orden

Tradicionalmente en la universidad hay cursos sobre cómo resolver ecuaciones diferenciales. El propósito de este módulo es familiarizarnos con la resolución de ecuaciones diferenciales separables y lineales de primer orden. Que, como mencionamos anteriormente, son las ecuaciones diferenciales más "fáciles" de resolver.

Definición 5.1: Ecuación diferencial separable de primer orden
Se dice que una ***ecuación diferencial separable de primer orden*** es cualquier ecuación diferencial que puede escribirse en la forma $$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \qquad (4)$$ Lo cual es equivalente a

$$g(y)dy = f(x)dx \qquad (5)$$

Ejemplo 2: Resuelva la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

Solución: Notemos que la ecuación diferencial es separable donde $f(x) = -x$ y $g(y) = y$. Para resolver la ecuación debemos reescribirla en términos de diferenciales como en (5), en otras palabras la separamos, veamos.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Multiplicamos toda la ecuación por *dx*.

$$dx \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \cdot dx$$

$$dy = -\frac{x}{y} \cdot dx$$

Multiplicamos toda la ecuación por y.

$$y \cdot dy = -\frac{x}{y} \cdot dx \cdot y$$

$$ydy = -xdx$$

La ecuación diferencial está lista para resolverla.

Ahora integramos en ambos lados de la ecuación,

$$ydy = -xdx$$

$$\int ydy = \int -xdx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$$

Se integran ambos lados. El miembro de la derecha con respecto a x y el miembro de la izquierda con respecto a y.
Podemos reescribir la solución para identificar a que familia pertenece.
Nota: En la integración de una ecuación separable no es necesario usar dos constantes, una a cada lado de la ecuación, pues la suma de constantes es constante. Recordemos que C_1 es una constante arbitraria, por tal razón, decimos que hemos obtenido una ***familia de soluciones de un parámetro,*** tradicionalmente a esta familia de soluciones se le llama la ***solución general*** de la ecuación diferencial**.** El parámetro es la constante.

$$2 \cdot \frac{1}{2}y^2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2 + C_1\right)$$

$$y^2 = -x^2 + 2C_1$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación por 2.

$$x^2 + y^2 = x^2 \pm x^2 + 2C_1$$
$$x^2 + y^2 = 2C_1$$
$$x^2 + y^2 = C$$

Sumamos x^2 en ambos lados de la ecuación. Sustituimos la constante arbitraria $2C_1$ por C por que la ecuación $x^2 + y^2 = C$ representa la solución general de la ecuación diferencial, que geométricamente representa una familia de círculos centrados en el origen con radio $\sqrt{C}$, $C > 0$.

Para resolver una ecuación diferencial separable de primer orden podemos seguir los siguientes pasos generales:

1. Determine si la ecuación diferencial de primer orden es separable. Esto es, ¿la ecuación se puede escribir de la forma dada en (4)?
   Nota: Recuerde que no todas la ecuaciones diferenciales de primer orden son separable, por ejemplo $\frac{dy}{dx} = sen(x + y)$.
2. Si la ecuación es separable reescríbala de la forma dada en (5):
   $$g(y)dy = f(x)dx$$
3. Integre ambos lados de la ecuación respecto a la variable indicada.

Ejemplo de práctica 2: Resuelva la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$.

Ecuación diferencial con condición inicial

Es común tener interés por resolver una ecuación diferencial de primer orden que esté sujeta a una ***condición inicial***. Esto es, en vez de buscar la solución general de la ecuación diferencial, estamos buscando una ***solución particular***, aquella que satisface la condición inicial. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3: Resuelva $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ sujeta a la condición inicial $y(4) = 3$.

Solución: Por el ejemplo 2, sabemos que la solución general de la ecuación diferencial es

$$x^2 + y^2 = C \qquad (6)$$

La condición inicial nos asegura que cuando $x = 4$, entonces, $y = 3$, de modo que al sustituir en (6) obtenemos,

$$(3)^2 + (4)^2 = C$$

por lo tanto, C = 25. Al sustituir en (6) obtenemos $x^2 + y^2 = 25$. Al despejar y obtenemos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. De estas dos funciones la que cumple la condición inicial es $y = \sqrt{25 - x^2}$, pues $y(4) = 3$.

Ejemplo de práctica 3: Resuelva $\frac{dy}{dx} = 4(y^2 + 1)$ sujeta a la condición inicial $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Ejemplo 4: Resuelva la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = ky$.

Solución: Dado que la ecuación es separable la reescribimos como,

$$\frac{1}{y}dy = kdx$$

ahora integramos,

$$\int \frac{1}{y}dy = \int k\,dx$$

y obtenemos,

$$ln|y| = kx + C_1.$$

Ahora despejamos y,

$$ln|y| = kx + C_1$$

Utilizamos la propiedad de los exponentes que nos asegura que si $x = y$, entonces, $e^x = e^y$.

$$e^{ln|y|} = e^{kx+C_1} = e^{kx} \cdot e^{C_1}$$

$$|y| = e^{C_1} \cdot e^{kx}$$

Identificamos $\pm e^{C_1}$ como C.

$$y = \pm e^{C_1} \cdot e^{kx}$$

$$y = Ce^{kx}$$

Solución general de la ecuación diferencial.

Ejemplo de práctica 4: Resuelva la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = kxy$.

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

No todas las ecuaciones diferenciales de primer orden son separables. Por ejemplo, en la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 3y$$

no existe forma de separar las variables para que se tenga dy y todas las expresiones que incluyen y en un lado y a dx, y a todas las expresiones que incluyan a x en el otro lado. Sin embargo, esta ecuación puede escribirse de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones de x. Se dice que una ecuación diferencial de esta forma es una ***ecuación diferencial lineal de primer orden***.

La técnica para resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden consiste en la integración; pero se integra solo después que la ecuación original se ha multiplicado por una función especial llamada ***factor de integración***.

Definición 5.2: Ecuación diferencial lineal de primer orden

Se llama ecuación diferencial lineal de primer orden a toda ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (7)$$

donde P y Q son funciones continuas de x. Si una ecuación diferencial de primer orden no es lineal, se dice que es ***no lineal***.

Las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden son lineales y nos damos cuenta comparándolas con (7).

$$\frac{dy}{dx} - 5y = 10 \qquad y \qquad x\frac{dy}{dx} + 7y = x^3.$$

Mientras las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden son no lineales.

$$x\frac{dy}{dx} + 3y^2 = -7 \qquad y \qquad y\frac{dy}{dx} - 5y = sen(x)$$

La potencia no es 1

El coeficiente depende de y

La ecuación (7) se denomina ***forma normal o estándar*** de una ecuación diferencial lineal. Nuestro propósito es buscar soluciones de (7) sobre un intervalo ***I*** para el cual P y Q sean continuas. La ecuación (7) tiene la propiedad de que cuando se multiplica por la función $e^{\int P(x)dx}$, el miembro izquierdo de (7) se convierte en la derivada del producto $e^{\int P(x)dx}y$. Veamos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right] &= e^{\int P(x)dx}\cdot\frac{dy}{dx}+y\cdot\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\right) \\ &= e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx}+e^{\int P(x)dx}P(x)y \qquad (8) \end{aligned}$$

Por lo tanto, si multiplicamos la (7) por $e^{\int P(x)dx}$, obtenemos

$$e^{\int P(c)dx}\cdot\frac{dy}{dx}+e^{\int P(x)dx}\cdot P(x)y = e^{\int P(x)dx}\cdot Q(x)$$

Esto es $\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right]$

Al comparar el miembro de la izquierda de la ecuación anterior con el resultado en (8), se concluye que

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right] = e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

Al integral ambos lados obtenemos

$$y\cdot e^{\int P(x)dx} = \int\left(Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}\right)dx$$

Así, la solución general es

$$y = e^{-\int P(x)dx}\cdot\int\left(Q(x)e^{\int P(x)dx}\right)dx \qquad (9)$$

No es bueno memorizar (9), es más sencillo recordar el proceso de obtención que ilustraremos más adelante. La función $e^{\int P(x)dx}$ que hace posible esto se conoce como ***factor de integración*** para la ecuación diferencial.

Para resolver una ecuación diferencial de primer orden lineal podemos seguir los siguientes pasos generales:

1. Escriba la ecuación dada en la forma normal (7); esto es, haga que el coeficiente de $\frac{dy}{dx}$ sea igual a 1.
2. Identifique *P(x)* (el coeficiente de *y*) y determine el factor de integración $e^{\int P(x)dx}$.
3. Multiplique la ecuación obtenida en el paso 1 por el factor de integración.
4. El miembro izquierdo de la ecuación en el paso 3 es la derivada del factor de integración multiplicado por *y* (la variable dependiente). Esto es, $$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right] = e^{\int P(x)dx}f(x)$$
5. Integra ambos miembros de la ecuación encontrada en el paso 4.

Veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5: Resuelva $x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6e^x$.

Solución: Veamos cómo se resuelve paso por paso.

$$\frac{1}{x}\left(x\,\frac{dy}{dx} - 4y = x^6\,e^x\right)$$
$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5e^y$$

Multiplicamos toda la ecuación por $\frac{1}{x}$ para que el coeficiente de $\frac{dy}{dx}$ sea igual a 1, paso 1.

$$P(x) = -\frac{4}{x}, por\ lo\ tanto, el\ factor\ de\ integración\ es$$
$$e^{\int -\frac{4}{x}dx} = x^{-4}.$$

Determinar el factor de integración, paso 2. Notemos que $P(x) = -\frac{4}{x}$ y $Q(x) = x^5e^x$ son continuas para $x > 0$.

$$x^{-4}\left(\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5e^y\right)$$
$$x^{-4}\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x^5} = xe^x$$

Multiplicar el factor de integración por toda la ecuación obtenida en el paso 1, paso 3.

$$x^{-4}\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x^5} = \frac{d}{dx}(x^{-4}y), por\ lo\ tanto,$$

El miembro del lado izquierdo de la ecuación anterior es igual a la derivada del producto entre el factor de integración y la variable dependiente *y*.

$$\frac{d}{dx}(x^{-4}y) = xe^{x}$$

Sustituir este resultado en la ecuación del paso 3, paso 4.

$$\int \frac{d}{dx}(x^{-4}y)dx = \int xe^{x}dx$$
$$x^{-4}y = xe^{x} - e^{x} + C$$

Integramos ambos lados de la ecuación obtenida en el paso 4, paso 5.

$$x^{4}(x^{-4}y = xe^{x} - e^{x} + C)$$
$$y = x^{5}e^{x} - x^{4}e^{x} + Cx^{4}$$

Multiplicamos toda la ecuación por x^4 para despejar la variable dependiente y. La solución está definida sobre $(0, \infty)$.

Ejemplo de práctica 5: Resuelva la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{sen(3x)}{x^2}$.

Ejemplo 6: Determine la solución particular de

$$\frac{dy}{dx} - 3y = xe^{3x}$$

que satisface $y = 4$ cuando $x = 0$.

Solución: El factor de integración es

$$e^{\int(-3)dx} = e^{-3x}$$

Al multiplicar por este factor obtenemos

$$e^{-3x}\left(\frac{dy}{dx} - 3y = xe^{3x}\right)$$
$$e^{-3x}\cdot\frac{dy}{dx} - 3y\cdot e^{-3x} = xe^{3x}\cdot e^{-3x}$$
$$e^{-3x}\cdot\frac{dy}{dx} - 3y\cdot e^{-3x} = x$$

Aplicando el paso 4, obtenemos

$$\frac{d}{dx}(e^{-3x}y) = x$$

Al integral ambos lados obtenemos

$$e^{-3x}y = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y = \frac{1}{2}x^2e^{3x} + Ce^{3x}$$

Al sustituir *y* = 4 cuando *x* = 0 obtenemos *C* = 4. La solución particular deseada es

$$y = \frac{1}{2}x^2e^{3x} + 4e^{3x}$$

Ejemplo de práctica 6: Determine la solución particular de

$$x\frac{dy}{dx} + y = e^x$$

que satisface *y* = 2 cuando *x* = 1.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. $\frac{2}{e^x(1+2e^{-x})} = \frac{2}{e^x(1+2e^{-x})}$
2. $3y^2 - 2x^3 = C$
3. $tan^{-1}(y) = 4x - \frac{3\pi}{4}$
4. $y = Ce^{\frac{1}{2}kx^2}$
5. $y = \frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{3}\cos(3x) + C\right)$
6. $y = \frac{1}{x}(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C)$

Ejercicios de práctica sección 5.1

En los ejercicios de 1 al 3 demuestre que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial que se da.

1. $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} = 0; y = \sqrt{1 - x^2}$
2. $-x\frac{dy}{dx} + y = 0; y = Cx$
3. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0; y = C_1 sen(x) + C_2 \cos(x)$

En los ejercicios del 3 al 15 determine primero la solución general (que incluya una constante C) para la ecuación diferencial dada. Después determine la solución particular que satisfaga la condición que se indica.

4. $\frac{dy}{dx} = x^2 + 1;\ \ y = 1\ cuando\ x = 1$
5. $\frac{dy}{dx} = x^{-3} + 2;\ \ y = 3\ cuando\ x = 1$
6. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y};\ \ y = 4\ cuando\ x = 1$
7. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{y}};\ \ y = 4\ cuando\ x = 1$
8. $\frac{ds}{dt} = 16t^2 + 4t - 1;\ \ s = 100\ cuando\ t = 0$
9. $\frac{du}{dt} = u^3(t^3 - t);\ \ u = 4\ cuando\ y = 0$
10. $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right)y = 3x + 4;\ \ y = 1\ cuando\ x = 1$
11. $\frac{dy}{dx} = e^x - y;\ \ y = 2e\ cuando\ x = 1$
12. $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2}{x}\right)y = 3x + 1;\ \ y = 1\ cuando\ x = 1$
13. $\frac{dy}{dx}\cos(x) + y - 1 = 0;\ \ \ y = 5\ cuando\ x = 0$
14. $x^3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{1/x^2};\ \ y = e\ cuando\ x = 1$
15. $\frac{dy}{dx} + (2x - 1)y = 0;\ \ y = 2\ cuando\ x = 1$

RESPUESTA EJERCICIOS DE TRÁCTICA SECCIÓN 5.1

1. $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$
2. $-Cx + Cx = 0$
3. $-y + y = 0$
4. $y = \frac{1}{3}x^3 + x + C; y = \frac{1}{3}x^3 + x - \frac{1}{3}$
5. $y = -\frac{1}{2}x^{-2} + 2x + C; y = -\frac{1}{2}x^{-2} + 2x + \frac{3}{2}$
6. $y^2 - x^2 = C; y = \sqrt{x^2 + 15}$
7. $y^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}} = C; y = \left(7 + x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$
8. $s = \frac{16}{3}t^3 + 2t^2 - t + C; s = \frac{16}{3}t^3 + 2t^2 - t + 100$
9. $u^2 = \frac{1}{-\frac{1}{2}t^4 + 2t^2 + C}; u = \sqrt{\frac{1}{-\frac{1}{2}t^4 + 2t^2 + \frac{1}{16}}}$
10. $y = x^2 + 2x + \frac{C}{x}; y = x^2 + 2x - \frac{2}{x}$
11. $y = e^x(x + C); y = e^x(x + 2 - e)$
12. $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{3}x + C; y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{12}$
13. $y = \frac{\tan(x) + \sec(x) + C}{\tan(x) + \sec(x)}; y = \frac{\tan(x) + \sec(x) + 4}{\tan(x) + \sec(x)}$
14. $y = e^{\frac{1}{x^2}}\left(C - \frac{1}{2x^2}\right); y = e^{\frac{1}{x^2}}\left(2 - \frac{1}{2x^2}\right)$
15. $y = \frac{C}{e^{x^2+x}}; y = \frac{2e^2}{e^{x^2+x}}$

5.2 Aplicaciones

Las matemáticas constituyen un lenguaje, así como una herramienta útil en la resolución de problemas de la “vida real”. Cuando resolvemos un problema de este tipo, el lenguaje coloquial se traduce a un lenguaje matemático. De la misma forma, es posible interpretar palabras, leyes empíricas, observaciones, o simplemente suposiciones, en términos matemáticos. Cuando intentamos describir algo, denominado ***sistema***, en términos matemáticos se construye un ***modelo*** de ese sistema. Algunas veces el sistema cambia con el tiempo, por ejemplo creciendo o decreciendo a cierta razón, y la razón de cambio es una derivada, entonces un ***modelo matemático*** del sistema puede ser una ecuación diferencial.

En esta sección consideraremos unos cuantos modelos matemáticos simples y sus soluciones.

Problema de un cuerpo que cae

Recordemos que si *s(t)*, *v(t)* y *a(t)* representan la posición, velocidad y aceleración, respectivamente, en el instante *t* de un objeto que se mueve a lo largo de un eje coordenado, entonces

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

$$a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Ejemplo 1: Cerca de la superficie de la Tierra, la aceleración a la que cae un objeto, debido a la gravedad, es 32 pies por segundo al cuadrado, siempre y cuando la resistencia al aire se pueda depreciar. Si un objeto se lanza directamente hacia arriba desde una altura inicial de 1,000 pies a una velocidad de 50 pies por segundo, determine su velocidad y altura 4 segundos después.

Solución: Supongamos que la altura *s* se considera positiva hacia arriba. Entonces $v = \frac{ds}{dt}$ inicialmente es positiva (*s* está aumentando), $a = \frac{dv}{dt}$ es negativa (la fuerza debida a la gravedad es descendente, por lo que *v* disminuye).Por lo tanto, comenzamos nuestro análisis con la ecuación diferencial $\frac{dv}{dt} = -32$, con las condiciones de que *v* = 50 y *s* = 100 cuando *t* = 0.

$$\frac{dv}{dt} = -32$$ Ecuación diferencial separable.

$$\int dv = \int -32dt$$ Separamos e integramos.

$$v = -32t + C$$

Al sustituir *v* = 50 cuando *t* = 0, obtenemos *C* = 50.

$$v = -32t + 50$$

Velocidad del objeto que es igual a $\frac{ds}{dt}$.

$$\frac{ds}{dt} = -32t + 50$$

Ecuación diferencial separable

$$\int ds = \int (-32t + 50)dt$$

Separamos e integramos

$$s = -16t^2 + 50t + K$$

Al sustituir *s* = 1000 cuando *t* = 0, obtenemos *K* = 1000.

$$s = -16t^2 + 50t + 1000$$

Por último, cuando *t* = 0.

$$v = -32(4) + 50 = -78 \; {}^{p}/_{s}$$
$$s = -16(4)^2 + 50(4) + 1000$$
$$= 944 \, pies$$

Por lo tanto luego de 4 segundos la velocidad es de -78 pies por segundo y la altura es de 944 pies.

Ejemplo de práctica 1: En la superficie de la Luna, la aceleración debida a la gravedad es -5.28 pies por segundo al cuadrado. Si un objeto se lanza hacia arriba desde una altura inicial de 1000 pies, a una velocidad de 56 pies por segundo, determine su velocidad y su altura 3 segundos más tarde.

Crecimiento de una población

Uno de los modelos para el crecimiento de una población se basa en la hipótesis de que la población crece con una rapidez proporcional a su tamaño,

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad (1)$$

La misma hipótesis se aplica en otras situaciones. En física nuclear, la masa de una sustancia radiactiva decae con una razón proporcional a la masa. En química, la velocidad de una reacción unimolecular de primer orden es proporcional a la concentración de la sustancia. En general, si *y(t)* es el valor de una cantidad *y* en el instante *t* y si la razón de cambio de *y* con respecto a *t* es proporcional a su tamaño *y(t)* en cualquier instante, entonces

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad (2)$$

donde k es una constante.

Ejemplo 2: La tasa de crecimiento de una población de moscas de la fruta en un instante dado es proporcional al tamaño de la población en dicho momento. Si al inicialmente el experimento hay 108 moscas y 180 moscas después del segundo día, determine el tiempo necesario para que el número de moscas se duplique.

Solución: Primero resolvamos la ecuación diferencial (1) sujeta a la condición inicial $P(0) = 108$.

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

$$\frac{dP}{P} = kdt$$

$$\int \frac{1}{P} dP = \int kdt$$

$$ln|P| = kt + C_1$$

Separamos e integramos.

$$P = e^{kt+C_1} = e^{C_1} \cdot e^{kt} \quad P = C \cdot e^{kt}$$

Despejamos para P e hicimos que $C = C_1$.

$$P = 108e^{kt}$$

Al sustituir $t = 0$ y $P = 108$, obtenemos $C = 108$.

Ahora utilizamos la observación empírica $P(2) = 180$ para determinar la constante de proporcionalidad k.

$$P = 108e^{kt}$$

$$180 = 108e^{2k}$$

Sustituimos $P(2) = 180$.

$$\frac{5}{3} = e^{2k}$$

Dividimos ambos lados de la ecuación entre 108 (recuerde que 180/108 = 5/3.

$$ln\left(\frac{5}{3}\right) = ln(e^{2k}) = 2k$$

Aplicamos la propiedad que nos asegura que si a = b (a y b mayores que 0) entonces ln(a) = ln(b). Recuerde que $ln(e^a) = a$.

$$k = \frac{1}{2} ln\left(\frac{5}{3}\right) \approx 0.255413$$

Dividimos ambos lados de la ecuación entre 2 y aproximamos la solución a seis lugares decimales.

$$P = 108e^{0.255413t}$$

Es el modelo matemático que describe el crecimiento de la mosca.

Ahora, para determinar el tiempo en que se duplica la cantidad de moscas, sustituimos P = 216 (el doble de la cantidad inicial) en el modelo y despejamos para t.

$$P = 108e^{0.255413t}$$
$$216 = 108e^{0.255413t}$$

Sustituimos P = 216 en el modelo.

$$2 = e^{0.255413t}$$

Dividimos ambos lados de la ecuación entre 108.

$$ln(2) = 0.255413t$$

Aplicamos la propiedad que nos asegura que si a = b (a y b mayores que 0) entonces ln(a) = ln(b). Recuerde que $ln(e^a) = a$.

$$t = \frac{ln(2)}{0.255413} \approx 2.7\ días$$

La cantidad de moscas en el experimento se duplican aproximadamente cada 7.7 días.

Ejemplo de práctica 2: La población de una ciudad crece a razón proporcional a la población en el instante t. La población inicial de 500 personas aumenta 15% en 10 años. Determina la población al cabo de 30 años.

Decaimiento radiactivo

El núcleo de un átomo consta de una combinación de protones y neutrones. Muchas de estas combinaciones de protones y neutrones son inestables; esto es, los átomos decaen o transmutan en átomos de otra sustancia. Se dice que tales núcleos son ***radiactivos***. Para modelar este fenómeno utilizamos (2). Los físicos expresan la rapidez de decaimiento en términos de la ***vida media***, el tiempo requerido para que decaiga la mitad de cualquier cantidad inicial.

Ejemplo 3: La vida media del radio 226 ($^{226}_{88}Ra$) es de 1590 años.

a. Una muestra de radio 226 tiene una masa de 100 mg. Determine el modelo para la masa de $^{226}_{88}Ra$ que queda después de t años.
b. Determine la masa después de 1000 años, correcta hasta el miligramo más cercano.
c. ¿Cuándo se reducirá la masa hasta 30 mg?

Solución:

a. Sabemos que

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

al resolver la ecuación diferencial obtenemos

$$y = Ce^{kt}$$

Al sustituir y = 100 cuando t = 0, obtenemos C = 100, esto es

$$y = 100e^{kt}$$

Al sustituir y = 50 cuando t = 1590, obtenemos $k = -\frac{ln(2)}{1590} \approx -0.000436$, por lo tanto

$$y = 100e^{-0.000436t}.$$

b. La masa después de 1000 años es

$$y = 100e^{-0.000436(1000)} \approx 65\ mg.$$

c. Queremos hallar el valor de t tal que y = 30, al sustituir obtenemos

$$30 = 100e^{-0.000436t}$$

al despejar para t obtenemos

$$t = \frac{ln\left(\frac{3}{10}\right)}{-0.000436} \approx 2761\ años.$$

Ejemplo de práctica 3: La vida media del polonio 210 es de 140 días.

a. Si una muestra tiene una masa de 200 mg. Determine el modelo para la masa que queda después de t años.
b. Determine la masa después de 100 días.
c. ¿Cuándo se reducirá la masa hasta 10 mg?

Otras aplicaciones

Uno de los tipos de problemas que pueden modelarse en términos de una ecuación diferencial está relacionado con las mezclas químicas, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4: Un tanque contiene 50 litros de una solución compuesta por 90% de agua y 10% de alcohol. Se bombea hacia el tanque, a razón de 4 litros por minuto, una segunda solución que contiene 50% de agua y 50% de alcohol. Luego la solución bien mezclada se extrae del tanque a razón de 5 litros por minuto, como muestra la Figura 5.1.

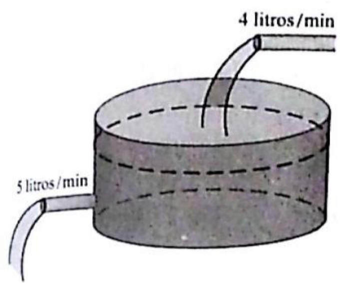

Figura 5.1

¿Cuánto alcohol queda en el tanque después de 10 minutos?

Solución: Sea y el número de litros de alcohol en el tanque luego de un tiempo arbitrario t. Sabemos que y = 5 cuando t = 0 (inicialmente hay 50 litros y el 10% es alcohol). Como el número de litros de solución en el tanque en un instante dado t es 50 – t y el tanque pierde 5 litros de solución por minuto, perderá

$$\frac{5}{50-t}\cdot y$$

Litros de alcohol por minuto. Por otro lado, como en el tanque entran 2 litros de alcohol por minuto, la razón de cambio de alcohol en el tanque viene dada por

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{5}{50-t}\cdot y$$

Lo que implica que

$$\frac{dy}{dt} + \frac{5}{50-t}\cdot y = 2$$

Que es una ecuación diferencial lineal de primer orden, con $P(t) = 5/(50 - t)$. Como

$$\int \frac{5}{50-t}dt = -5ln|50-t|$$

Al ser $t < 50$, podemos omitir el signo de valor absoluto, por lo tanto, el factor de integración es

$$e^{\int P(t)dt} = e^{-5ln(50-t)} = \frac{1}{(50-t)^5}$$

Así que la solución general es

$$\frac{y}{(50-t)^5} = \int \frac{2}{(50-t)^5}dt = \frac{1}{2(50-t)^4} + C$$

$$y = \frac{50-t}{2} + C(50-t)^5$$

Como $y = 5$ cuando $t = 0$, al sustituir obtenemos $C = -\frac{20}{50^5}$, lo que significa que la solución particular es

$$y = \frac{50-t}{2} - 20\left(\frac{50-t}{50}\right)^5$$

Finalmente, cuando $t = 10$, la cantidad de alcohol en el tanque es

$$y = \frac{50-10}{2} - 20\left(\frac{50-10}{50}\right)^5 \approx 13.45\ litros.$$

Ejemplo de práctica 4: Inicialmente, 50 libras de sal se disuelven en un tanque que contiene 300 galones de agua. Una solución de salmuera se bombea hacia el tanque a razón de 3 galones por minuto, y luego la solución bien mezclada se extrae al mismo ritmo. Si la concentración de la solución que entra es 2 libras por galón, determine la cantidad de sal en el tanque luego de 50 minutos.

Ejemplo 5: Se inyecta glucosa, por vía intravenosa, a razón de q unidades por minuto. El cuerpo elimina del flujo sanguíneo la glucosa a un ritmo proporcional a la cantidad presente. Sea $Q(t)$ la cantidad de glucosa presente en la sangre en el instante t.

a. Determine la ecuación diferencial que describe el ritmo de cambio de la glucosa en sangre, en función del tiempo.

b. Resuelva esa ecuación diferencial, haciendo $Q = Q_0$ cuando $t = 0$.

Solución:

a. Como el cuerpo elimina del flujo sanguíneo la glucosa a un ritmo proporcional a la cantidad presente y $Q(t)$ es la cantidad presente de glucosa en el instante t, entonces el cuerpo elimina

$$k \cdot Q$$

Unidades de glucosa por minuto. Por otro lado, como se inyectan q unidades de glucosa por minuto, la razón de cambio de glucosa en sangre viene dada por

$$\frac{dQ}{dt} = q - k \cdot Q$$

b. Como la ecuación

$$\frac{dQ}{dt} + kQ = q$$

es una ecuación diferencial lineal de primer orden, con $P(t) = k$. Como

$$\int kdt = kt$$

por lo tanto, el factor de integración es

$$e^{\int P(t)dt} = e^{kt}$$

Así que la solución general es

$$Q \cdot e^{kt} = \int qe^{kt}dt = \frac{q}{k}e^{kt} + C$$

$$Q = \frac{q}{k} + Ce^{-kt}$$

Como $Q = Q_0$ cuando $t = 0$, al sustituir obtenemos $C = Q_0 - \frac{q}{k}$, lo que significa que la solución particular es

$$Q = \frac{q}{k} - \left(Q_0 - \frac{q}{k}\right) e^{-kt}$$

Ejemplo de práctica 5: Los experimentos demuestran que si la reacción química

$$N_2O_5 \rightarrow 2NO_2 + \frac{1}{2}O_2$$

Se lleva a cabo a 45ºC, la velocidad de reacción del pentóxido de dinitrógeno es proporcional a su concentración, como sigue:

$$-\frac{d[N_2O_5]}{dt} = 0.0005[N_2O_5]$$

a. Determine una expresión para la concentración de $[N_2O_5]$, después de *t* segundos, si la concentración inicial es C_0.
b. ¿Cuánto tardará la reacción en reducir la concentración de N_2O_5 hasta el 90% de su valor inicial?

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. $v(3) = 40.16\,\frac{pies}{segundo}; s(t) = 1144.24\,pies$
2. 1688
3. a. $y = 200e^{-0.004951t}$; b. 122 mg; c. 605 años
4. 266.41 libras
5. a. $y = \sqrt{-4000t + C}$; b. $\frac{0.19{C_0}^2}{4000}$

Ejercicios de práctica sección 5.2

1. Se suelta una pelota desde la parte más alta del Arco de San Luis Missouri, 630 pies.
   a. Determine el modelo matemático que describe la altura *s* de la pelota en un instante *t*.
   b. Determine la altura de la pelota luego de 2 segundos de haberla soltado.
2. Se lanza una pelota hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial 96 pies por segundo. Determine la altura máxima que alcanza la pelota.
3. Un cultivo de bacterias crece con una rapidez proporcional a su tamaño. La cuenta fue de 400 bacterias después de 2 horas y 25,600, al cabo de 6 horas.
   a. ¿Cuál fue la población inicial del cultivo?
   b. Determine una expresión para la población después de *t* horas.

   c. ¿Cuándo habrán 100,000 bacterias en el cultivo?

4. Un cultivo de bacterias se inicia con 500 y crece con una rapidez proporcional a su tamaño. Después de 3 horas, hay 8,000.
   a. Determine una expresión para la cantidad de bacterias después de *t* horas.
   b. Determine la cantidad de bacterias después de 4 horas.
   c. ¿Cuándo habrán 30,000 bacterias?
5. El ritmo de desintegración del radio es proporcional a la cantidad presente en un instante dado. Determinar el porcentaje de una muestra actual que quedará al cabo de 25 años, si la vida media de este es 1,600 años.
6. En la conservación de alimentos, el azúcar de caña sufre un proceso de inversión y se transforma en glucosa y fructuosa. En soluciones diluidas, el ritmo de inversión es proporcional a la concentración $y(t)$ del azúcar inalterada. Si la concentración es 1/50 cuando t = 0 y 1/200 tras 3 horas, determine la concentración del azúcar inalterada después de 6 y 12 horas.
7. El isótopo radiactivo del plomo, Pb-209, decae en razón proporcional a la cantidad presente en el instante *t* y tiene una vida media de 3.3 horas. Si inicialmente hay 10 gramos de plomo, ¿en cuánto tiempo decae el 90% del plomo?
8. Un depósito de 200 galones está lleno de una solución que contiene 25 libras de concentrado. Comenzando en $t = 0$, se vierte agua destilada a razón de 10 gal/min, y se agita constantemente. Al mismo tiempo se extrae solución a igual ritmo.
   a. Determine la cantidad de concentrado en la solución como función de *t*.
   b. Determine el momento en que la cantidad de concentrado en el depósito es de 15 libras.
9. Un gran tanque contiene 100 galones de un fluido en el cual se han disuelto 10 libras de sal. Salmuera que contiene ½ libra de sal por galón se bombea hacia el tanque a razón de 6 gal/min. Luego la solución bien mezclada se bombea hacia fuera a razón de 4 gal/min. Determine el número de libras de sal que hay en tanque después de 30 minutos.
10. Cuando dos productos químicos A y B se combinan, se forma un compuesto C. La reacción de segundo orden resultante entre los productos químicos es modelada por la ecuación diferencial

$$\frac{dX}{dt} = k(250 - X)(40 - X)$$

    donde $X(t)$ denota el número de gramos del compuesto C presente en el instante t.
   a. Determine $X(t)$ si se sabe que $X(0) = 0$ gramos y $X(10) = 30$ gramos.
   b. ¿Qué cantidad del compuesto C hay a los 15 minutos?
11. En una reacción química, un compuesto se transforma en otra sustancia a un ritmo proporcional a la cantidad no transformada. Si había inicialmente 20 gramos de la

sustancia original y 16 gramos luego de una hora. ¿en qué momento se habrá transformado el 75% de dicho compuesto?

12. La razón de cambio de la presión atmosférica P con respecto a la altitud h es proporcional a P, siempre que la temperatura sea constante. A 15ºC y al nivel del mar, la presión es de 101.3 kPa y a h = 1,000 metros, de 87.14 kPa.
    a. ¿Cuál es la presión a una altura de 3,000 metros?
    b. ¿Cuál es la presión en la cima del monte McKinley, a una altitud de 6,187 metros?

RESPUESTA EJERCICIOS DE TRÁCTICA SECCIÓN 5.1

1. a. $-16t^2 + 630$; b. 566 pies
2. 144 pies
3. a. 100; $y = 100e^{0.693147t}$; c. 10 años
4. a. $y = 500e^{0.924196t}$; b. 20,159 bacterias; 4,43 días
5. 99%
6. 1/800; 1/64,000
7. 11 horas
8. a. $y = 25e^{-\frac{1}{2}t}$; b. 10.2 minutos
9. 8.84 libras
10. a. $X(t) = \frac{1000(e^{0.12585t}-1)}{25e^{0.12585t-4}}$; b. 34.79 gramos.
11. 6.21 horas
12. a. 64.48 kPa; b. 39.91 kPa