Las funciones que pueden expresarse en términos de suma, resta, multiplicación, división, raíces de variables y constantes se denominan *funciones algebraicas*. En este módulo estudiaremos las *funciones exponenciales* y *logarítmicas*. Estas funciones no son algebraicas; pertenecen a la clase de funciones llamadas *funciones trascendentales*. Las funciones exponenciales y logarítmicas se usan para modelar una gran variedad de fenómenos del mundo real: crecimiento de la población de personas, animales y bacterias; decaimiento de sustancias radioactivas; epidemias; magnitudes de sonidos y terremotos, entre otras.

4.1 Función exponencial

Objetivos: Al finalizar el estudiante,

1. Definirá el concepto función exponencial.
2. Definirá la función exponencial base *e*.
3. Dada la fórmula de la función exponencial determinará sí la gráfica es creciente o decreciente.
4. Trazará la gráfica de funciones exponenciales.
5. Determinará el intercepto en y de una función exponencial.
6. Determinará el dominio y el rango (alcance) de una función exponencial.
7. Determinará la asíntota horizontal de una función exponencial.
8. Resolverá ecuaciones exponenciales igualando las bases.

Muchas de las funciones que se estudian en los cursos básicos de matemática incluyen exponentes. Sin embargo, en la gran mayoría de los casos, el exponente es una constante y la base una variable. La *función exponencial*, posiblemente, es la primera función que se estudia en que la variable independiente aparece en un exponente. Como se verá, esto tiene un efecto significativo sobre las propiedades y gráficas de estas funciones. Recomendamos que repasen las propiedades básicas de los exponentes discutidas en el Anejo 4.1 antes de avanzar.

Definición 4.1: Función exponencial
La ecuación $$f(x) = b^x \qquad b > 0, b \neq 1 \qquad (1)$$ define una ***función exponencial*** para cada constante *b* diferente, llamada **base**. El dominio de esta función es el conjunto de todos los números real.

Como mencionamos anteriormente el dominio de *f* es el conjunto de todos los números reales y podemos demostrar que el rango (alcance) de *f* es el conjunto de todos los números reales positivos. Como mencionamos en la definición la base *b* es positiva, para evitar números imaginarios, y distinta a 1 para evitar que sea una función constante.
Veamos los siguientes ejemplos.

1. Trace la gráfica de las funciones $f(x) = 2^x$ *y* $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y compárelas.

Solución: Hagamos primero una tabla de soluciones para cada función.

x	$f(x) = 2^x$	$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-5	$\frac{1}{32}$	32
-4	$\frac{1}{16}$	16
-3	$\frac{1}{8}$	8
-2	$\frac{1}{4}$	4
-1	$\frac{1}{2}$	2
0	1	1
1	2	$\frac{1}{2}$
2	4	$\frac{1}{4}$
3	8	$\frac{1}{8}$
4	16	$\frac{1}{16}$
5	32	$\frac{1}{32}$

Ahora localicemos los puntos y tracemos las gráficas.

$f(x) = 2^x$ $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Para comparar las gráficas notemos que la gráfica de *f* es creciente y la de *g* es decreciente.

Ejemplo de práctica 1: Trace la gráfica de las funciones $f(x) = 3^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ en el mismo plano coordenado y compárelas.

Ejemplo 2: Trace la gráfica de las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 5^x$ en el mismo plano coordenado y compárelas.

Solución: Hagamos primero una tabla de soluciones para cada función.

x	$f(x) = 2^x$	$g(x) = 5^x$
-5	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{3125}$
-4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{625}$
-3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{125}$
-2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{25}$
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$
0	1	1
1	2	5
2	4	25
3	8	125
4	16	625
5	32	3125

Ahora localicemos los puntos y tracemos las gráficas.

$f(x) = 2^x$
$g(x) = 5^x$

Notemos que las gráficas de f y g tienen la misma forma básica, y pasan a través del punto (0, 1). Además, el eje x es una ***asíntota horizontal*** para cada gráfica, pues notemos que $f(x) \to 0$, cuando $x \to -\infty$. La principal diferencia entre las gráficas es su verticalidad. Esto es, la gráfica de g crece más rápidamente que la gráfica de f.

Ejemplo de práctica 2: Trace la gráfica de las funciones $f(x) = 5^x$ y $g(x) = 10^x$ en el mismo plano coordenado y compárelas.

Ejemplo 3: Trace la gráfica de las funciones $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $g(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ en el mismo plano coordenado y compárelas.

Solución: Hagamos primero una tabla de soluciones para cada función.

x	$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$g(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$
-5	32	3125
-4	16	625
-3	8	125
-2	4	25
-1	2	5
0	1	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{25}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{125}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{625}$
5	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{3125}$

Ahora localicemos los puntos y tracemos las gráficas.

$f(x) = (1/5)^x$
$g(x) = (1/2)^x$

Notemos que las gráficas de f y g tienen la misma forma básica, y pasan a través del punto (0, 1). Además, el eje x es una asíntota horizontal para cada gráfica, pues notemos que $f(x) \to 0$, cuando $x \to \infty$. La principal diferencia entre las gráficas es su verticalidad. Esto es, la gráfica de f decrece más rápidamente que la gráfica de g.

Ejemplo de práctica 3: Trace la gráfica de las funciones $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x$ en el mismo plano coordenado y compárelas.

En general, para bases menores que 1, la gráfica es una reflexión a través del eje y de las gráficas para bases mayores que 1. Las gráficas de los ejemplos anteriores sugieren que las gráficas de funciones exponenciales tienen las siguientes propiedades.

Teorema 4.1: Propiedades de las gráficas de funciones exponenciales
Sea $f(x) = b^x$ una función exponencial, $b > 0, b \neq 1$. Entonces la gráfica de $f(x)$: 1. Es continua para todos los números reales 2. No tiene picos 3. Pasa a través del punto (0, 1) 4. Se encuentra por encima del eje x, el cual es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ o cuando $x \to -\infty$ pero no ambas. 5. Crece cuando x aumenta sí $b > 1$; decrece cuando x aumenta si $0 < b < 1$. 6. Interseca cualquier recta horizontal como máximo una vez (es decir, f es uno a uno).

Propiedades adicionales

A continuación resumimos estas leyes de los exponentes y agregamos otras dos propiedades útiles.

Propiedades adicionales
Para a y b números reales positivos, $a \neq 1, b \neq 1$, y x y y reales: 1. Leyes de los exponentes: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$ $\quad (ab)^x = a^x \cdot b^x$ $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ $\quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ 2. $a^x = a^y$ sí y sólo si $x = y$.

3. Para $x \neq 0$, $a^x = b^x$ sí y sólo si $a = b$.

Ejemplo 4: Resuelva la ecuación $2^{2x-1} = 16$.

Solución: Expresemos ambos lados de la ecuación en términos de la misma base, y usemos la propiedad 2 para igualar los exponentes.

$2^{2x-1} = 16$	Ecuación original.
$2^{2x-1} = 2^4$	Expresamos 16 como una potencia de 2.
$2x - 1 = 4$	Utilizamos la propiedad 2 para igualar los exponentes.
$2x = 5$	Sumamos 1 en ambos lados de la ecuación.
$x = \frac{5}{2}$	Dividimos ambos lados entre 2.

Ejemplo de práctica 4: Resuelva la ecuación $3^{-5x+3} = \frac{1}{81}$.

La función exponencial con base e

Sorprendentemente la función exponencial $f(x) = 10^x$, función exponencial con base 10, no se encuentra entre las funciones exponenciales más frecuentemente utilizadas en las matemáticas. En cambio, la base usada más común es un número con el que podemos no estar familiarizados. Veamos,

x	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
1	2
10	2.59374246…
100	2.70481382…
1,000	2.71692393…
10,000	2.71814592…
100,000	2.71826823…
1,000,000	2.71828046…

Al calcular el valor de $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ para valores cada vez más grandes de x (tabla anterior), parece como si $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ se aproxima a un número cercano a 2.7183. En el curso básico de cálculo, demostramos que cuando $x \to \infty$ (aumenta sin límite), el valor de $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to e$ ($\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ se aproxima a un número irracional ***e***). Tal como los números irracionales π y $\sqrt{2}$ tienen representaciones decimales infinitas y no periódicas, e también tiene una representación decimal infinita y no periódica. Hasta 12 cifras decimales,

$$e \approx 2.718281828459$$

Exactamente quién descubrió el número e todavía se sigue discutiendo. Debe su nombre al gran matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783), quien calculó e hasta 23 cifras decimales usando $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

La constante e se convierte en una base ideal para una función exponencial porque en cálculo y matemáticas de alto nivel muchas operaciones tienen su mínima expresión usando esta base. Este es el por qué veremos que e se usa ampliamente en expresiones y fórmulas que modelan fenómenos del mundo real.

Definición 4.2: Función exponencial con base e

Para un número real x, la ecuación

$$f(x) = e^x$$

define la ***función exponencial con base e***.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. $f(x) = 3^x \qquad g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

2. $f(x) = 5^x \quad g(x) = 10^x$

3. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad g(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x$

4. $x = \frac{7}{5}$

Ejercicios de práctica sección 4.1

En los siguientes ejercicios relaciona cada ecuación con las gráficas de la figura.

1. $y = (\frac{1}{5})^x$

2. $y = 6^x$

3. $y = (\frac{3}{5})^x$

4. $y = 2^x$

En los siguientes ejercicios utiliza la calculadora para computar la contestación a 4 lugares decimales.

5. $3^{\sqrt{2}}$ 6. $7^{\sqrt{2}}-1$ 7. e^3+2e^{-2} 8. $5^{\pi}-7$

En los siguientes problemas, simplifica.

9. $2^5 \cdot 2^7$ 10. $(3^3)^2$ 11. $\frac{5^7}{5^5}$ 12. $\left(\frac{2^3}{2^5}\right)^2$

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales igualando las bases.

13. $3^{2x+3}=3$ 14. $5^{x+3}=25$ 15. $2^{2x+3}=16$

16. $3^{2x+3}=3^{x-1}$ 17. $5^{x+3}=5^{3x-1}$ 18. $2^{2x+3}=2^{-5x+7}$

19. $27^{2x+3}=9^{x-1}$ 20. $25^{x+3}=5^{3x-1}$ 21. $8^{x+3}=2^{-5x+7}$

22. $2^{x^2+3}=2^{12}$ 23. $5^{x^2-1}=125$ 24. $2^{x^2+3x}=16$

Respuestas a los ejercicios de práctica, sección 4.1

1. Verde
2. Azul
3. Rojo
4. Negro
5. 4.7288
6. 2.2390
7. 20.3562
8. 149.9925
9. 2^{12}
10. 3^6
11. 5^2
12. $\frac{1}{2^4}$
13. $x=-1$
14. $x=-1$
15. $x=\frac{1}{2}$
16. $x=-4$
17. $x=2$

18. $x = \frac{4}{7}$
19. $x = \frac{-11}{4}$
20. $x = 4$
21. $x = \frac{-1}{4}$
22. $x = \pm 3$
23. $x = \pm 2$
24. $x = -4 \; o \; x = 1$

4-2 Modelo exponencial: Aplicaciones

Objetivos: Al finalizar el estudiante:

1. Utilizará el modelo exponencial para resolver aplicaciones del crecimiento de poblaciones.
2. Utilizará el modelo exponencial para resolver aplicaciones de decaimiento radioactivo.

Una de las principales razones por la que estudiamos la función exponencial es el hecho de que muchos fenómenos que ocurren naturalmente en nuestro mundo podemos modelarlos con exactitud a través de esta función. En esta sección estudiaremos aplicaciones, que incluyen el crecimiento de la población de personas y bacterias, y el decaimiento radioactivo.

Modelo exponencial

Las poblaciones tienden a crecer exponencialmente y a diferentes tasas. Una medida de la tasa crecimiento que resulta conveniente y se entiende con facilidad, es el ***tiempo doble***, esto es, el tiempo que tarda una población en duplicar su tamaño. En periodos cortos el ***modelo de crecimiento del tiempo doble*** a menudo se utiliza para modelar el crecimiento poblacional:

$$P(t) = P_0 2^{\frac{t}{d}} \qquad (2)$$

donde $P(t)$ = población en el tiempo t

P_0 = población en el tiempo $t = 0$ (población inicial)

d = tiempo doble

Observemos que cuando $t = d$,

$$P(t) = P_0 \cdot 2^{\frac{d}{d}} = 2P_0$$

y la población es el doble de la población original, como debe ser.

Ejemplo 1: Según un estimado de 2008, la población de Nicaragua era cerca de 5.7 millones y estaba creciendo debido a una tasa de natalidad alta y a una tasa de mortalidad relativamente baja. Si la población continúa creciendo a la misma tasa, se duplicará en 37 años. Si el crecimiento se mantiene, ¿cuál será la población en 20 años luego del 2008?; 55 años? Calcula las respuestas hasta tres lugares decimales.

Solución: Podemos usar el modelo de crecimiento del tiempo doble $P = P_0 2^{\frac{t}{d}}$. Notemos que al sustituir en el modelo $P_0 = 5.7$ y $d = 37$ obtenemos el modelo matemático,

$$P(t) = 5.7\left(2^{\frac{t}{37}}\right)$$

En este modelo simplemente sustituimos los valores $t = 20 \quad y \quad t = 55$,

$$P(20) = 5.7\left(2^{\frac{20}{37}}\right) \approx 8.291\, millones$$
$$P(55) = 5.7\left(2^{\frac{55}{37}}\right) \approx 15.972\, millones$$

Ejemplo de práctica 1: Suponga que en el ejemplo anterior el *tiempo doble* es de 40 años. ¿Cuál será la población en 20 años luego del 2008?; 75 años después? Calcula las respuestas hasta tres lugares decimales.

El modelo del tiempo doble no es el único usado para modelar poblaciones. En el ejemplo 2 usaremos un modelo alterno basado en que la *razón de cambio* de la cantidad presente es proporcional a la cantidad presente en un momento dado (En el módulo 5 discutiremos a fondo esta situación y demostraremos el modelo.). La fórmula es la siguiente:

$$P(t) = P_0 e^{kt} \qquad (3)$$

donde

P(t) = población en el tiempo *t*

P_0 = población en el tiempo $t = 0$ (población inicial)

k = tasa de crecimiento relativa

La ***tasa de crecimiento relativa*** se escribe como un porcentaje en forma decimal. Por ejemplo, si una población crece de manera que en cualquier momento aumenta 5% de la población actual por año, la tasa de crecimiento relativa *k* sería 0.05.

Ejemplo 2: El cólera, una enfermedad intestinal, es causado por la bacteria cólera que se multiplica exponencialmente por división celular y se modela con la fórmula

$$P(t) = P_0 e^{1.386t}$$

donde *P(t)* es el número de bacterias presentes después de *t* horas y P_0 es el número inicial de bacterias presentes (cantidad de bacterias cuando $t = 0$). Si empiezas con una bacteria, ¿cuántas habrá en 7 horas?; 23 horas? Calcula las respuestas al entero más cercano.

Solución: Notemos que la población inicial es 1 bacteria, por lo tanto, el modelo matemático para esta situación es,

$$P(t) = e^{1.386t}$$

Al sustituir los valores $t = 7$ y $t = 23$, obtenemos;

$$P(7) = e^{1.386(7)} \approx 16{,}350 \; bacterias$$

$$P(23) = e^{1.386(23)} \approx 69{,}893{,}936{,}380{,}000 \; bacterias$$

Ejemplo de práctica 2: El conteo inicial en un cultivo de bacterias fue de 500 bacterias. Luis, biólogo de la Universidad de Puerto Rico, más tarde hizo un conteo de una muestra del cultivo y encontró que la tasa de crecimiento relativa es de 40% por hora.

a. Determine la función que modela el número de bacterias presentes en el cultivo luego de *t* horas.
b. Estime el número de bacterias en el cultivo luego de 10 horas.

Las funciones exponenciales también pueden usarse para modelar el decaimiento radioactivo. Los isótopos radioactivos se usan ampliamente para terapia y diagnóstico médico, como fuente de energía en satélites y de electricidad en muchos países. Si se empieza con una cantidad C_0 de un isótopo radioactivo particular, la cantidad disminuye exponencialmente con el paso del tiempo. La tasa de decaimiento varía dependiendo del isótopo radioactivo. Una medida conveniente respecto a la tasa de decaimiento radioactivo es la llamada ***vida media*** del isótopo; esto es, el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de un material. Podemos usar el siguiente ***modelo de decaimiento***:

$$C(t) = C_0 2^{-\frac{t}{h}} \qquad (4)$$

donde

$C(t)$ = cantidad luego de un tiempo t

C_0 = cantidad en el tiempo $t = 0$

h = vida media

Observa que cuando la cantidad de tiempo transcurrido es igual a la vida media ($t = h$)

$$C(h) = C_0 2^{-\frac{h}{h}} = C_0 \cdot 2^{-1} = \frac{1}{2}C_0$$

y la cantidad de material radioactivo presente es la mitad de la cantidad original, como debe ser.

Ejemplo 3: El isótopo radioactivo galio-67 (^{67}Ga) usado para el diagnóstico de tumores malignos, tiene una vida media biológica de 46.5 horas. Si comienzas con 50 mg del isótopo, ¿cuántos mg quedarán después de 36 horas? Calcula las respuestas hasta dos lugares decimales.

Solución: Notemos que al sustituir en (4) $C_0 = 50 \quad y \quad h = 46.5$ obtenemos,

$$C(t) = 50\left(2^{-\frac{t}{46.5}}\right)$$

Al sustituir $t = 36$ obtenemos,

$$C(36) = 50\left(2^{-\frac{36}{46.5}}\right) \approx 29.23\, miligramos$$

Ejemplo de práctica 3: El isótopo radiactivo polonio-210 (^{210}Po) tiene una vida media de 140 días. Supongamos que una muestra de esta sustancia tiene una masa de 300 mg.

a. Determine la función que modela la cantidad de la muestra remanente luego de un tiempo *t*.
b. ¿Cuántos mg quedan luego de 100 horas?

En el ejemplo 2, vimos como una función exponencial con base *e* puede usarse como una alternativa para el modelo del tiempo doble. De la misma forma podemos usarla para el modelo de la vida media. La fórmula es la siguiente:

$$C(t) = C_0 e^{-kt} \qquad (5)$$

donde

$C(t)$ = la cantidad de material radioactivo en el tiempo t

C_0 = la cantidad en el tiempo $t = 0$ (cantidad inicial)

k = una constante positiva ***específica para el tipo*** de material

Ejemplo 4: La masa $C(t)$ que queda después de t días de una muestra de 40 g de torio-234 está dada por

$$C(t) = 40e^{-0.0277t}$$

Determine cuánto quedará de la muestra después de 30 días.
Solución: Al sustituir *t* = 30 en el modelo obtenemos

$$C(t) = 40e^{-0.0277(40)} \approx 16.13 \text{ g}$$

Ejemplo de práctica 4: La cantidad presente de una sustancia radiactiva luego de t años está dada por $N(t) = N_0 e^{-0.008t}$. Si inicialmente hay 25 mg de esta sustancia, determine la cantidad presente luego de 230 años.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. 8.061 millones; 20.908 millones
2. $P(t) = e^{0.4t}$; $P(10) \approx 27{,}299\ bacterias$
3. a. $C(t) = 300 \cdot 2^{-\frac{t}{140}}$; b. $C(100) \approx 182.85\ mg$.
4. $N(230) = 25 \cdot e^{-0.008(230)} \approx 3.97\ mg$.

Ejercicios de práctica sección 4.2

Resuelve los siguientes problemas:

1. Si las bacterias de un cultivo se duplican cada 0.25 hora, escribe una ecuación que dé la cantidad de bacterias *C* en el cultivo después de *t* horas, suponiendo que el cultivo tiene 40 bacterias al comienzo.

2. Debido a su corto ciclo de vida, la mosca *Drosophila* de la fruta se usa en algunos estudios genéticos. Raymond Pearl de la John Hopkins University, por ejemplo, estudió 300 generaciones sucesivas de descendientes de un único par de moscas *Drosophila*. En una situación de laboratorio con un amplio suministro de alimento y espacio, el tiempo de duplicación para una población particular fue 2.4 días. Si comienzas con 5 moscas hembras y 5 machos, ¿Cuántas moscas esperas tener en 6 días?, en 2 semanas?

3. En 2008 se estimó que Kenia tenía una población cercana a 38,000,000 de personas y un tiempo de duplicación de 25 años. Si el crecimiento continúa a la misma tasa, halla la población en el 2015. Calcula la respuesta al entero más cercano.

4. En 1965, Gordon Moore, fundador de Intel, predijo que el número de transistores que podrían instalarse en un chip de computadoras se duplicaría cada 2 años. Esto se ha

convertido en la *ley de Moore*. En 1970, en un chip pudieron instalarse 2,200 transistores. Usa la ley de Moore para predecir el número de transistores en 1990.

5. El isótopo radioactivo tecnecio 99m (^{99m}Tc) se usa para obtener imágenes del cerebro. El isótopo tiene una vida media de 6 horas. Si se usan 12 miligramos, ¿cuánto quedará después de 3 horas?; 24 horas? Calcula la respuesta hasta dos lugares decimales.

6. Según la CIA World Factbook, la población del mundo se estimó en cerca de 6,800 millones en 2008, y la población estaba creciendo continuamente a una tasa de crecimiento relativo de 1.188%. Si esta tasa de crecimiento continúa, ¿cuál sería la población en 2020 hasta dos lugares decimales?

7. Según la CIA World Factbook, la población de México se estimó en cerca de 100 millones en 2008, y la población estaba creciendo continuamente a una tasa de crecimiento relativo de 1.142%. Si esta tasa de crecimiento continúa, ¿cuál sería la población en 2015 hasta tres dígitos significativos?

8. En 2005, la población de Rusia era 143 millones y la de Nigeria era 129 millones. Si las poblaciones de Rusia y Nigeria crecen continuamente a tasas de crecimiento relativo de 0.37% y 2.56%, respectivamente, ¿en cuál año Nigeria tuvo una población mayor que Rusia? Usa la Internet para comprobar si la predicción fue exacta.

9. La Ley de Enfriamiento de Newton establece que la tasa a la cual un objeto se enfría es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y el medio que lo rodea. La temperatura *T* del objeto *t* horas más tarde está dada por

$$T = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$$

donde T_m es la temperatura del medio que rodea al objeto y T_0 es la temperatura del objeto cuando $t = 0$. Supón que una botella de vino a temperatura ambiente de 72 °F se pone en el refrigerador para enfriarla antes de una comida. Si la temperatura del refrigerador se mantiene Respuestas a los ejercicios de práctica, sección 1.1a 40 °F y $k = 0.4$ determina la temperatura del vino, al grado más cercano, después de 3 horas.

Respuestas a los ejercicios de práctica, sección 4.2

1. $C(t) = 40 \cdot 2^{\frac{t}{0.25}}$
2. $C(6) \approx 57; C(14) \approx 570$
3. 46,139,405
4. 2,252,800
5. 8.49 mg; 0.75 mg
6. 7,841.91 millones

7. 108.32 millones
8. 4.7 años
9. $49.64°F$

4.3 Funciones logarítmicas

Objetivos: Al finalizar el estudiante,

1. Definirá el concepto función logarítmica.
2. Trazará la gráfica de funciones logarítmicas.
3. Cambiará de forma logarítmica a forma exponencial y viceversa.
4. Aplicará las propiedades de la función logarítmica en la resolución de problemas.
5. Definirá logaritmo común.
6. Definirá logaritmo natural.
7. Aplicará la fórmula de cambio de base.

La función exponencial $f(x) = b^x$ para $b > 0, b \neq 1$ es una biyección y, por tanto, tiene un inversa. Su inversa, representada por $f^{-1}(x) = log_b(x)$ (se lee "logaritmo base b evaluado en *x*") se llama ***función logaritmo base b***. Igual que en las funciones exponenciales, hay diferentes funciones logarítmicas para cada base positiva diferente de 1. Un punto (*x*, *y*) está en la gráfica de $f^{-1}(x) = log_b(x)$ si y sólo si el punto (*y*, *x*) está en la gráfica de $f(x) = b^x$.

Definición 4.3: Función logaritmo
Para $b > 0, b \neq 1$, la inversa de la función exponencial $f(x) = b^x$, representada por $f^{-1}(x) = log_b(x)$ es la ***función logaritmo*** con base *b*. Recordemos que: $y = log_b(x)$ es equivalente a $x = b^y$ (1)

Como la función logaritmo es la inversa de la función exponencial, podemos utilizar este hecho para aprender algunas cosas sobre las funciones logarítmicas, a partir del conocimiento de las funciones exponenciales. La gráfica de la función exponencial es el reflejo a través de la línea $y = x$ de la gráfica de la función exponencial, Figura 1.

$f(x) = b^x, b > 1$ $f(x) = log_b(x), b > 1$ $f(x) = b^x, b < 1$ $f(x) = log_b(x), b < 1$

Figura 1

Teorema 4.2: Propiedades de las gráficas de funciones logarítmicas
Sea $f(x) = log_b(x), b > 0, b \neq 1$, la función logarítmica. Entonces, la gráfica de la función: 1. Es continua en su dominio $(0, \infty)$. 2. Es una curva suave. 3. Pasa a través del punto (1, 0). 4. El eje *y* es una asíntota vertical. 5. Es creciente si $b > 1$, es decreciente si $0 < b < 1$.

Ejemplo 1: Traza la gráfica de la función $f(x) = log_3(x)$

Solución: La gráfica de la función es creciente pues la base es mayor que 1.

f(x)=log(x)/log(3)

Ejemplo de práctica 1: Trace la gráfica de la función $f(x) = log_{\frac{2}{3}}(x)$.

Evaluación del logaritmo

Ahora evaluaremos logaritmos utilizando (1). Para evaluar logaritmos cambiamos de la forma logarítmica a la forma exponencial, veamos.

Ejemplo 2: Evalúa los siguientes logaritmos:

a. $log_2(16)$
b. $log_2(\frac{1}{8})$
c. $log_{10}(\frac{1}{10,000})$

Solución: Para evaluar usamos (1).

a. $log_2(16) = y \quad \leftrightarrow \quad 2^y = 16 = 2^4, por\ lo\ tanto, y = 4.$
b. $log_2\left(\frac{1}{8}\right) = y \quad \leftrightarrow \quad 2^y = \frac{1}{8} = 2^{-3}, por\ lo\ tanto, y = -3.$
c. $log_{10}\left(\frac{1}{10,000}\right) = y \quad \leftrightarrow \quad 10^y = \frac{1}{10,000} = 10^{-4}, por\ lo\ tanto, y = -4.$

Ejemplo de práctica 2: Evalúa los siguientes logaritmos:

a. $log_5(\frac{1}{25})$
b. $log_9(3)$
c. $log_7(343)$

Propiedades de las funciones logarítmicas

Las propiedades de las funciones logarítmicas se obtienen a partir de las propiedades de las funciones exponenciales que se estudiaron en la Sección 4-1. Estas propiedades son sumamente importantes en los cursos básicos de matemática, por tal razón las vamos a repasar.

Teorema 4.3: Propiedades de las funciones logarítmicas

Sean b, M y N números reales positivos, $b \neq 1$ y p y x son números reales, entonces

1. $log_b(MN) = log_b(M) + log_b(N)$
2. $log_b\left(\frac{M}{N}\right) = log_b(M) - log_b(N)$
3. $log_b(M^p) = p \cdot log_b(M)$
4. $log_b(1) = 0$
5. $log_b(b) = 1$
6. $log_b(b^x) = x$
7. $b^{log_b(x)} = x, x > 0$
8. $log_b(M) = log_b(N)\ si\ y\ sólo\ si\ M = N$

Ejemplo 3: Dado que $log_b(2) = 1.43, log_b(3) = 2.12\ y\ log_b(5) = 2.25$, evalúa los siguientes logaritmos:

a. $log_b(6)$
b. $log_b(\sqrt{15})$
c. $log_b\left(\frac{2}{3}\right)$
d. $log_b(7.5)$

Solución: Para evaluar los logaritmos hay que utilizar las propiedades, los datos y conocimientos básicos de aritméticas, veamos.

a.

$log_b(6) = log_b(2 \cdot 3)$ Conocimiento básico

$log_b(2 \cdot 3) = log_b(2) + log_b(3)$ Propiedad 1

$log_b(2) + log_b(3) = 1.43 + 2.12 = 3.55$ Datos

b.

$log_b(\sqrt{15}) = log_b\left(15^{\frac{1}{2}}\right)$ Conocimiento básico

$$log_b\left(15^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} log_b(15)$$ Propiedad 3

$$\frac{1}{2} log_b(15) = \frac{1}{2}(log_b(3) + log_b(5))$$ Propiedad 1

$$\frac{1}{2}\left(log_b(3) + log_b(5)\right) = \frac{1}{2}(2.12 + 2.25) = 2.185$$ Datos

c.

$$log_b\left(\frac{2}{3}\right) = log_b(2) - log_b(3)$$ Propiedad 2

$$log_b(2) - log_b(3) = 1.43 - 2.12 = -0.99$$ Datos

d.

$$log_b(7.5) = log_b\left(\frac{3 \cdot 5}{2}\right)$$ Conocimiento básico

$$log_b\left(\frac{3 \cdot 5}{2}\right) = log_b(3) + log_b(5) - log_b(2)$$ Propiedad 1 y 2

$$log_b(3) + log_b(5) - log_b(2) = 2.12 + 2.25 - 1.43$$
$$= 2.94$$ Datos

Ejemplo de práctica 3: Dado que $log_b(7) = 1.73, log_b(11) = 2.31\ y\ log_b(13) = 2.55$, evalúa los siguientes logaritmos:

a. $log_b(77)$
b. $log_b(\sqrt{143})$
c. $log_b\left(\frac{13}{49}\right)$
d. $log_b(7b^5)$

Logaritmos comunes y naturales

Recordemos que la base de la función logaritmo es cualquier número real positivo distinto a 1. Por tal razón, hay infinitas bases posibles, pero de todas éstas, hay dos que se usan con más frecuencia. Los ***logaritmos comunes*** son logaritmos con base 10. Los

logaritmos naturales son logaritmos con base *e*. La mayoría de calculadoras tienen una tecla identificada como "*log*" para la función logaritmo común y otra tecla identificada como "*ln*" para la función logaritmo natural.

Ejemplo 4: Usa una calculadora para evaluar cada logaritmo hasta tres lugares decimales.

a. $log(2.35)$
b. $log(24.42)$
c. $ln(2.35)$
d. $ln(24.42)$

Solución: Actualmente la mayoría de las calculadoras utilizan la entrada directa de datos, esto es, escribimos los problemas como si lo hiciéramos en una computadora. Por tal razón, para evaluar los logaritmos simplemente escribimos los logaritmos en la calculadora y ejecutamos.

a. $log(2.35) = 0.371$
b. $log(24.42) = 1.387$
c. $ln(2.35) = 0.854$
d. $ln(24.42) = 3.195$

Ejemplo de práctica 4: Usa una calculadora para evaluar cada logaritmo hasta tres lugares decimales.

a. $log(12.45)$
b. $log(43.12)$
c. $ln(12.45)$
d. $ln(43.12)$

La fórmula de cambio de base

¿Cómo encontrarías el logaritmo de un número positivo con una base diferente de 10 o *e*? Por ejemplo, ¿cómo hallarías $log_5(7)$? Actualmente, hay calculadoras pueden evaluar este logaritmo fácilmente. Sin embargo, la mayoría no puede. Por tal razón, para evaluar logaritmos con base distinta a 10 o *e*, utilizaremos la fórmula de cambio de base que presentamos a continuación.

Fórmula de cambio de base
Sean, *a*, *b* y *x* números positivos con *a* y *b* distintos a 1, entonces $$log_b(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(b)} \qquad (2)$$

Ejemplo 5: Evalúa $log_5(7)$, aproxima la respuesta a tres lugares decimales.

Solución: Para evaluar el logaritmo, primero cambiamos la base a 10 o *e* y luego evaluamos con la calculadora, en la solución cambiaremos a base 10.

$$log_5(7) = \frac{log(7)}{log(5)}$$

Fórmula de cambio de base

$$\frac{log(7)}{log(5)} \approx 1.209$$

Evaluamos con la calculadora y aproximamos a tres lugares decimales.

Ejemplo de práctica 6: Evalúa $log_5(15)$, aproxima la respuesta a tres lugares decimales.

Aplicaciones

Cuando una cantidad física varía en un rango muy grande, es conveniente sacar el logaritmo para obtener un conjunto de números más manejables. Ejemplo de esto son la escala para el pH, la cual mide la acidez, escala de decibeles para la intensidad del sonido y la escala Richter que mide la intensidad de un terremoto.

Escala para el pH

Los químicos median la acidez de una solución dando su concentración de iones de hidrógeno hasta que Sorensen, en 1909, propuso una medida más conveniente. El definió,

$$pH = -log[H^+] \qquad (3)$$

donde $[H^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno medidos en moles por litro (M). El hizo esto para evitar trabajar con números pequeños y exponentes negativos. Veamos, si $[H^+] = 10^{-4}$ M, entonces

$$pH = -log(10^{-4}) = -(-4) = 4.$$

Soluciones con un pH de 7 se definen como neutrales, aquellas con pH < 7 son acidas y aquellas con pH > 7 son básicas. Notemos que cuando el pH aumenta una unidad, la $[H^+]$ cambia por un factor de 10.

Ejemplo 6: La concentración de iones de hidrógeno en una muestra de sangre humana es de $[H^+] = 3.16 \times 10^{-8}$ M. Determine el pH de la muestra y clasifíquela en acida o básica.

Solución: Para determinar el pH sustituimos en la fórmula (1), veamos.

$$pH = -log[H^+] = -\log(3.16 \times 10^{-8}) \approx 7.5.$$

Como el pH es mayor que 7, la muestra es básica.

Ejemplo de práctica 6: La concentración de iones de hidrógeno en una solución es de $[H^+] = 0.000016$ M. Determine el pH de la solución y clasifíquela en acida o básica.

Ejemplo 7: La lluvia más ácida que jamás se haya medido ocurrió en Escocia en 1974; su pH era de 2.4. Determine la concentración de iones de hidrógeno.

Solución: Para determinar la concentración debemos resolver una ecuación logarítmica (más adelante en el módulo trataremos el tema de resolución de ecuaciones logarítmicas a fondo) utilizando la definición del logaritmo. Veamos:

Sabemos que $pH = -log[H^+]$

al cambiar en forma exponencial obtenemos

$$[H^+] = 10^{-pH}$$

Como el pH = 2.4, al sustituir en la ecuación anterior obtenemos

$$[H^+] = 10^{-pH} = 10^{-2.4} \approx 4 \times 10^{-3}\text{M}$$

Ejemplo de práctica 7: Las concentraciones de iones de hidrógeno en los quesos van desde 4.0×10^{-7} M hasta 1.6×10^{-5} M. Determine el rango correspondiente en lecturas de pH.

La intensidad del sonido

El oído humano puede escuchar sonidos con un amplio rango de intensidades. El sonido más alto que una persona sana puede escuchar sin dañar el tímpano tiene una intensidad de un trillón (1,000,000,000,000) de veces el sonido más suave que esa misma persona puede escuchar. Si se usaran estas intensidades como una escala para medir el volumen, habría un gran conflicto usando números desde cero hasta trillones, lo cual parece complicado, si no es completamente tonto. Sabemos que las funciones logarítmicas aumentan muy lentamente. Podemos tomar ventaja de esto para crear una escala de intensidad del sonido que sea mucho más condensada y, por tanto, más manejable.

La escala de decibeles para la intensidad del sonido es un ejemplo. El **decibel**, que recibe su nombre en honor del inventor del teléfono, Alexander Graham Bell (1847-1922) se define como sigue:

$$D = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) \qquad \text{Escala de decibeles} \tag{4}$$

donde D es el ***nivel de decibeles*** del sonido, I es la ***intensidad*** del sonido medida en vatios por metro cuadrado (W/m^2) e I_0 es la intensidad del sonido menos audible que una persona joven saludable promedio puede escuchar. Ese último sonido está estandarizado como $I_0 = 10^{-12}$ vatios por metro cuadrado. En la Tabla 1 se enumeran algunas intensidades del sonido típicas procedentes de fuentes familiares.

Tabla 1: Intensidad del sonido

Intensidad del sonido (W/m^2)	Sonido
1.0×10^{-12}	Umbral de audición
5.2×10^{-10}	Murmullo
3.2×10^{-6}	Conversación normal
8.5×10^{-4}	Tráfico pesado
3.2×10^{-3}	Martillo hidráulico
1.0×10^{0}	Umbral de dolor
8.3×10^{2}	Avión a reacción

Ejemplo 8: Determine el número de decibeles (redondea tus respuestas hasta dos lugares decimales) de:

a. Un murmullo con una intensidad de sonido de 5.2×10^{-10} vatios por metro cuadrado.
b. Del tráfico pesado a 8.5×10^{-4} vatios por metro cuadrado.
c. ¿Cuántas veces mayor es la intensidad del sonido del tráfico pesado en comparación con un murmullo?

Solución: Sean D_m y D_t la intensidad del murmullo y la intensidad del tráfico pesado, respectivamente.

a. $D_m = 10log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10log\left(\frac{5.2\times10^{-10}}{10^{-12}}\right) = 27.16\ decibeles$

b. $D_t = 10log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10log\left(\frac{8.5\times10^{-4}}{10^{-12}}\right) = 89.29\ decibeles$

c. Al dividir la intensidad del tráfico pesado entre la del murmullo, obtenemos:

$$\frac{8.5\times10^{-4}}{5.2\times10^{-10}} = 1{,}634{,}615.40\ veces.$$

Ejemplo de práctica 8: Determine el número de decibeles (redondea tus respuestas hasta dos lugares decimales) de:

a. Una conversación normal con una intensidad de sonido de 3.2×10^{-6} vatios por metro cuadrado.
b. De un martillo hidráulico con una intensidad de 3.2×10^{-3} vatios por metro cuadrado.
c. ¿Cuántas veces mayor es la intensidad del sonido del martillo hidráulico en comparación con una conversación normal?

La escala Richter

La energía liberada por el terremoto más violento registrado, medida en julios, es cerca de 100 billones (100,000,000,000) de veces la energía liberada por un sismo menor que apenas se siente. En 1935, el sismólogo de California Charles Richter diseñó una escala logarítmica que lleva su nombre y aún se utiliza ampliamente en Estados Unidos. La ***magnitud*** de un terremoto *M* en la ***escala Richter**** está dada como sigue:

$$M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right) \qquad \text{Escala Richter} \qquad (5)$$

donde E es la energía liberada por el terremoto, medida en julios, y E_0 es la energía liberada por un sismo de referencia muy pequeño, la cual se ha estandarizado como $E_0 = 10^{4.4}$ julios. El poder destructivo de los terremotos respecto a las magnitudes en la escala Richter se presenta en la Tabla 2.

Tabla 2: Magnitud en la escala Richter

Magnitud en la escala Richter	Poder destructivo
M < 4.5	Menor
4.5 < M < 5.5	Moderado
5.5 < M < 6.5	Fuerte
6.5 < M < 7.5	Mayor
7.5 < M	Grande

Ejemplo 9: El terremoto de 1906 en San Francisco liberó aproximadamente 5.96×10^{16} julios de energía. Otro terremoto golpeó el área de la bahía justo antes del tercer juego de la Serie Mundial de 1989, liberando 1.12×10^{15} julios de energía.

a. Determina la magnitud de cada terremoto en la escala Richter. Redondea tus respuestas hasta dos lugares decimales.
b. ¿Cuántas veces liberó más energía el terremoto de 1906 que el de 1989?

Solución: Sean M_s y M_m la magnitud del terremoto de 1906 en San Francisco y el terremoto de la Serie Mundial de 1989, respectivamente.

a. $M_s = \frac{2}{3} log\left(\frac{E}{E_0}\right) = \frac{2}{3} log\left(\frac{5.96\times10^{16}}{10^{4.4}}\right) = 8.25$

b. $M_m = \frac{2}{3} log\left(\frac{E}{E_0}\right) = \frac{2}{3} log\left(\frac{1.12\times10^{15}}{10^{4.4}}\right) = 7.10$

c. Al dividir la energía liberada por el terremoto de 1906 entre la energía liberada por el terremoto de 1989, obtenemos:

$$\frac{5.96 \times 10^{16}}{1.12 \times 10^{15}} = 53.2\, veces.$$

Ejemplo de práctica 9: La bomba atómica lanzada en Nagasaki, Japón, el 9 de agosto de 1945, libero alrededor de 1.34×10^{14} julios de energía. ¿Cuál será la magnitud de un terremoto que libera esa cantidad de energía?

*Originalmente, Richter definió la magnitud de un terremoto en términos de logaritmos de la máxima amplitud de la onda sísmica, en milésimas de milímetro, medidas en un sismógrafo estándar. La ecuación (2) da esencialmente la misma magnitud que Richter obtuvo para un terremoto dado, pero en términos de logaritmos de la energía liberada por el terremoto.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DE PRÁCTICA

f(x)=log(x)/log(2/3)

1.
2. a. -2; b. ½; c. 3
3. a. 4.04; b. 2.43; c. -2.07; d. 6.73
4. a. 1.095; b. 1.635; c. 2.522; d. 3.764
5. 1.683
6. 4.796, ácida
7. 4.796 hasta 6.398
8. a. 65.05; b. 95.05; c. 1,000 veces
9. 6.48

Ejercicios de práctica sección 4.3

Evalúa los siguientes.

1. $log_3\left(\sqrt{27}\right)$
2. $log_2(160) - log_2(5)$
3. $log(4) + log(25)$
4. $log\left(\frac{1}{\sqrt{1000}}\right)$
5. $log_4(192) - log_4(3)$
6. $log_{12}(9) + log_{12}(16)$

7. $log_2(6) - log_2(15) + log_2(20)$
8. $log_3(100) - log_3(18) - log_3(50)$
9. $log_4(16^{100})$
10. $log(log(10^{10,000}))$
11. $ln\left(\ln(e^{e^{200}})\right)$

Reescribe los problemas 12 a 18 usa las Leyes de los Logaritmos para expandir la expresión.

12. $log_2(2x)$
13. $log_3(xy^3)$
14. $log_a\left(\frac{x^2}{yz^3}\right)$
15. $log_3\left(\frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2-1}}\right)$
16. $log_5\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$
17. $ln\left(\frac{3x^2}{(x+1)^{10}}\right)$
18. $ln\left(\frac{x^3\sqrt{x-1}}{3x-4}\right)$

En los problemas 19 a 22, usa las Leyes de los Logaritmos para combinar la expresión.

19. $log_3(5) + 5log_3(2)$
20. $log_2(x) + log_2(y) - log_2(z)$
21. $ln(a+y) + ln(x-y) - 2ln(z)$
22. $ln(5) + 2\,ln(x) + 3ln(x^2+5)$

En los problemas 23 a 26, usa la Fórmula de Cambio de Base para evaluar el logaritmo, aproxima las contestaciones a tres lugares decimales.

23. $log_3(16)$
24. $log_6(92)$
25. $log_7(2.76)$
26. $log_{12}(1.44)$

27. Una sustancia desconocida tiene una concentración de iones de hidrógeno de $[H^{+}] = 3.1 \times 10^{-8}$M. Determine el pH y clasifica la sustancia como ácida o básica.
28. Se da la lectura del pH de un vaso de líquido. Determine la concentración de iones de hidrógeno del líquido.

    a. Vinagre: pH = 3.0
    b. Leche: pH = 6.5
    c. Cerveza: pH = 4.6
    d. Agua: pH = 7.3

29. ¿Cuál es el nivel de decibeles de

    a. el umbral de audición, 1.0 x 10^{-12} vatios por metro cuadrado?
    b. el umbral de dolor, 1.0 vatios por metro cuadrado?

30. Si la intensidad de un sonido de una fuente es 1,000 veces la de otro, ¿cuánto mayor es el nivel de decibeles del sonido más alto respecto al más bajo?
31. Uno de los terremotos más violentos registrados ocurrió en Colombia en 1906, con una generación de energía de 1.99 x 10^{12} julios. ¿Cuál fue su magnitud en la escala de Richter? Calcula la respuesta con una cifra decimal.
32. En Anchorage, Alaska, hubo un terremoto mayor en 1964 que liberó 7.08 x 10^{16} julios de energía. ¿Cuál fue su magnitud en la escala de Richter? Calcula la respuesta con una cifra decimal.
33. El terremoto de 1933 en Long Beach, California, tuvo una lectura en la escala de Richter de 6.3 y el de 1964 en Anchorage tuvo una lectura en la escala de Richter de 8.3. ¿Cuántas veces fue más poderoso el terremoto de Anchorage que el de Long Beach?
34. Generalmente, un terremoto requiere una magnitud superior a 5.6 en la escala Richter para infligir daños graves. ¿Cuántas veces más poderoso que este fue el gran terremoto de Colombia en 1906, que registró una magnitud de 8.6 en la escala de Richter?

Respuestas a los ejercicios de práctica, sección 4.3

1. 3/2
2. 5
3. 2
4. -3/2
5. 3
6. 2
7. 3
8. -2
9. 200
10. 4
11. 200
12. $1 + log_2(x)$
13. $log_3(x) + 3log_3(y)$
14. $2log_a(x) - log_a(y) - 3log_a(z)$
15. $log_3(x) + log_3(x^2+1) - \frac{1}{2}log_3(x+1) - \frac{1}{2}log_3(x-1)$
16. $\frac{1}{2}log_5(x+1) - \frac{1}{2}log_5(x-1)$
17. $\ln(3) + 2\ln(x) - 10\ln(x+1)$
18. $3\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x-1) - \ln(3x-4)$
19. $log_3(10)$
20. $log_2\left(\frac{xy}{z}\right)$
21. $\ln\left[\frac{(a+y)(x-y)}{z^2}\right]^2$
22. $ln[5x^2(x^2-5)^3]$
23. 2.524
24. 2.524
25. 0.522
26. 0.147
27. 7.51, básica
28. $a.$ 10^{-3}; $b.\ 3.16 \times 10^{-7}$; $c.\ 2.51 \times 10^{-5}$; $d.\ 5.01 \times 10^{-8}$
29. a. 0; b. 120
30. 30 más
31. 5.3
32. 8.3
33. 1,000 veces
34. 31.623 veces

4.4 Resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Objetivos: Al finalizar el estudiante,

1. Resolverá ecuaciones exponenciales.
2. Resolverá ecuaciones logarítmicas.
3. Resolverá problemas relacionados.

Resolución de ecuaciones exponenciales

Decimos que una ecuación es exponencial si la variable está en el exponente. Para resolver la ecuación debemos sacar la variable del exponente. En algunos casos particulares podemos lograrlo igualando la bases en ambos lados de la ecuación (véase el ejemplo 4 de la sección 4.1). En general, el logaritmo tiene una propiedad que podemos utilizar para hacerlo. Veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1: Resuelva la ecuación $2^{5x-1} = 3$ (aproxime la solución a tres lugares decimales).

Solución: Como mencionamos, para resolver la ecuación tenemos que sacar la variable del exponente. Esto lo logramos utilizando las propiedades del logaritmo.

$$2^{5x-1} = 3$$

Aplica el logaritmo común (o natural) en ambos lados de la ecuación.

$$\log(2^{5x-1}) = \log(3)$$

Utiliza la propiedad 3 del logaritmo para sacar $5x$ -1 del exponente.

$$(5x-1)\log(2) = \log(3)$$

Divide ambos lados entre log(2).

$$5x - 1 = \frac{\log(3)}{\mathrm{lo1g}(2)}$$

Despeje la x.

$$x = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{\log(3)}{\log(2)}\right)$$

Utilice la calculadora para aproximar la solución.

$$x \approx 0.517$$

Solución aproximada a tres lugares decimales.

Ejemplo de práctica 1: Resuelva la ecuación $3^{2x+1} = 5$ (aproxime la solución a tres lugares decimales).

Ejemplo 2: Resuelva la ecuación $2^{-2x+1} = 3^{3-x}$ (aproxime la solución a tres lugares decimales).

Solución: Como en el ejemplo anterior, para resolver la ecuación tenemos que sacar la variable del exponente. Veamos,

$2^{-2x+1} = 3^{3-x}$	Aplica el logaritmo común (o natural) en ambos lados de la ecuación.
$\log(2^{-2x+1}) = \log(3^{3-x})$	Utiliza la propiedad 3 del logaritmo para sacar los exponentes.
$(-2x+1)\log(2) = (3-\mathrm{x})\log(3)$	Utiliza la propiedad distributiva para romper los paréntesis.
$-2x\log(2) + \log(2) = 3\log(3) - x\log(3)$	Agrupe los términos que tienen la variable *x*.
$-2x\log(2) + x\log(3) = 3\log(3) - \log(2)$	Saque *x* de factor común en el lado izquierdo de la ecuación.
$x[-2\log(2) + \log(3)] = 3\log(3) - \log(2)$	Divide para despejar la *x*.
$x = \dfrac{3\log(3) - \log(2)}{-\log(2) + \log(3)} = \dfrac{\log\left(\frac{27}{2}\right)}{\log\left(\frac{3}{2}\right)}$	Utilice la calculadora para aproximar la solución.
$x \approx 1.885$	Solución aproximada a tres lugares decimales.

Ejemplo de práctica 2: Resuelva la ecuación $3^{-2x+1} = 5^{2-3x}$ (aproxime la solución a tres lugares decimales).

Ejemplo 3: Resuelva la ecuación $e^{3-2x} = 4$, (aproxime la solución a tres lugares decimales).

Solución: Como la base de la ecuación exponencial es e, utilizaremos el logaritmo natural para resolver la ecuación, veamos.

$e^{3-2x} = 4$	Aplique ln en ambos lados de la ecuación.
$\ln(e^{3-2x}) = \ln(4)$	Recuerde que ln(*e*) = 1.
$3 - 2x = \ln(4)$	Despeje para *x*.
$x = \dfrac{\ln(4) - 3}{-2} = \dfrac{3 - \ln(4)}{2}$	Utilice la calculadora para aproximar la solución a tres lugares decimales.
$x = 0.807$	Solución aproximada a tres lugares decimales.

Ejemplo de práctica 3: Resuelva la ecuación $e^{3-5x} = 16$, (aproxime la solución a tres lugares decimales).

Ahora tenemos las herramientas necesarias para resolver problemas que involucran la resolución de ecuaciones exponenciales. Veamos el siguiente ejemplo.

El ***fechamiento por radiocarbono*** es un método que usan los arqueólogos para calcular la edad de objetos antiguos. Nuestra atmósfera es bombardeada constantemente con rayos cósmicos. Estos rayos producen neutrones que a su vez, reaccionan con el nitrógeno para producir carbono radioactivo, carbono-14 (^{14}C), que tiene una vida media de aproximadamente 5,730 años. Las plantas absorben bióxido de carbono de la atmósfera, mismo que después sigue su camino hacia los animales a través de la cadena alimenticia. Mientras una planta o un animal están vivos, el carbono-14 permanece en el organismo en un nivel constante. Sin embargo, después de que el organismo muere el carbono-14 decae según la ecuación

$$C(t) = C_0 e^{-0.000124t} \qquad (1)$$

donde *C(t)* es la cantidad de carbono 14 presente después de *t* años que la planta o el animal muere *y* C_0 es la cantidad presente en el tiempo $t = 0$. Entonces podemos determinar el tiempo transcurrido después de la muerte del organismo midiendo la cantidad de ^{14}C aún existente en él. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4: Un artefacto de madera de una tumba antigua contiene 65% del carbono-14 que está presente en los árboles vivos. Determine hace cuánto tiempo se fabricó este artefacto.

Solución: Recordemos que el modelo es $C(t) = C_0 e^{-0.000124t}$ (1).

$C(t) = C_0 e^{-0.000124t}$	Sustituir en la ecuación $C(t) = 0.65C_0$.
$0.65C_0 = C_0 e^{-0.000124t}$	Notemos que la ecuación que resulta es exponencial. Divide entre C_0 ambos lados de la ecuación.
$0.65 = e^{-0.000124t}$	Aplique logaritmo base *e* a ambos lados de la ecuación.
$\ln(0.65) = -0.000124t$	Recuerde que $\ln(e)=1$. Despeje para *t*.
$t = \dfrac{\ln(0.65)}{-0.000124}$	Utilice la calculadora para aproximar la solución.
$t \approx 3474\ años$	El artefacto se fabricó hace aproximadamente 3474 años.

Ejemplo de práctica 4: La tela de la mortaje de una momia egipcia se estima que contiene 59% del carbono-14 que contenía originalmente. Determina hace cuánto tiempo fue enterrada la momia.

Resolución de ecuaciones logarítmicas

Decimos que una ecuación es logarítmica si la variable es parte del argumento de este. Para resolver la ecuación debemos sacar la variable del argumento. En algunos casos particulares podemos lograrlo utilizando el cambio de logaritmo a exponente (véase el ejemplo 8 de la sección 4.3). En general, utilizamos las propiedades del logaritmo para resolver la ecuación. Como el dominio de la función logaritmo es el conjunto de los números reales positivos, ***siempre*** debemos comprobar las soluciones obtenidas pues es posible al alguna sea una solución extraña. Veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5: Resuelve $\log_2(x-3)+\log_2(x)=2$.

Solución:

$$\log_2(x-3)+\log_2(x)=2$$

Utiliza la propiedad $\log_b(M)+\log_b(N)=\log_b(MN)$, en el lado izquierdo de la ecuación.

Cambie de logaritmo a exponente.

$$\log_2[x(x-3)]=2$$

$$x(x-3)=2^2$$

Note que la ecuación que resulta es cuadrática. Resuelva la ecuación.

$$x(x-3)=4$$

$$x^2-3x-4=0$$

Comprueba las soluciones, sustituyendo en la ecuación original.

$$(x-4)(x+1)=0$$

$$x=4 \ o \ x=-1$$

Si x = 4, al sustituir en la ecuación original obtenemos

$$\log_2(4-3)+\log_2(4)=2$$

Como el $\log_2(1)=0$,

$$\log_2(4)=2$$

Notemos que resulta una proposición cierta, por lo tanto, x = 4 es solución.

Si x = -1, al sustituir en la ecuación original obtenemos

$$\log_2(-1-3)+\log_2(-1)=2$$

Notemos que tanto $\log_2(4)$ como $log_2(-1)$ no están definidos, lo que implica que x = -1 es una solución extraña.

La solución de la ecuación es x = 4, x = -1 es una solución extraña, por tal razón, se descarta.

Ejemplo de práctica 5: Resuelve $\log_3(x-2)+\log_3(x)=1$.

Ejemplo 6: Resuelve $\log_5(x+5)=\log_5(x^2+3x+2)$.

Solución:

$$\log_5(x+5)=\log_5(x^2+3x+2)$$

Utiliza la propiedad $\log_b(M)=\log_b(N)$ *si y solo si* $M=N$.

$$x+5=x^2+3x+2$$

Note que la ecuación que resulta es cuadrática. Resuelva la ecuación.

$$0=x^2+2x-3$$

Comprueba las soluciones, sustituyendo en la ecuación original.

$$(x+3)(x-1)=0$$

$$x=-3 \ o \ x=1$$

Si x = -3, al sustituir en la ecuación original obtenemos

Si x = 1, al sustituir en la ecuación original obtenemos

$\log_5(-3+5) = \log_5((-3)^2 + 3(-3) + 2)$

Como el $\log_5(2) = \log_5(2)$, x = -3 es solución.

$\log_5(1+5) = \log_5((1)^2 + 3(1) + 2)$

Como el $\log_5(6) = \log_5(6)$, x = 1 es solución.

Las soluciones de la ecuación son x = -3 y x = 1.

Ejemplo de práctica 6: Resuelve $\log_5(2x^2 + 5x - 3) = \log_5(x^2 + 10x - 7)$.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. 0.232
2. 0.806
3. 0.045
4. 4,255
5. -3; 1
6. 1; 4

Ejercicios de práctica sección 4.4

En los ejercicios del 1 al 10, determine la solución de la ecuación exponencial, y exprésela a tres lugares decimales.

1. $5^x = 16$
2. $10^{-x} = 2$
3. $2^{1-x} = 3$
4. $3^{2x-1} = 7$
5. $4 + 5^{3x} = 8$
6. $e^{-3x+1} = 16$
7. $5^x = 4^{x+1}$
8. $3^{x/2} = 5^{1-x}$
9. $2^{3x+1} = 3^{x-2}$

10. $5^{x+5} = 7^{-2x-1}$

En los ejercicios del 11 al 20 resuelva la ecuación logarítmica para x.

11. $\ln(x) = 10$

12. $\ln(5 + x) = 1$

13. $\log(3x + 5) = 3$

14. $\log_3(2 - x) = 2$

15. $2 - \ln(3 - x) = 0$

16. $\log_2(x^2 - x - 2) = 2$

17. $\log(3) + \log(x) = \log(5) + \log(x - 2)$

18. $2\log(x) = \log(2) + \log(3x - 4)$

19. $log_5(x) - log_5(x - 1) = log_5(25)$

20. $log_5(x) + log_5(x + 1) = log_5(20)$

Respuestas a los ejercicios de práctica, sección 4.3

1. 1.723
2. -0.301
3. -0.585
4. 1.386
5. 0.287
6. -0.591
7. 6.213
8. 0.746
9. 2.947
10. 1.817
11. e^{10}
12. $e - 5$

13. 995/3
14. -7
15. $3 - e^2$
16. -2; 3
17. 5
18. 2; 4
19. 25/24
20. 4; -5 es una solución extraña