3 La función cuadrática

Objetivos: Al finalizar el estudiante,

1. Definirá el concepto función cuadrática.
2. Dada una función cuadrática, determinará:
   a. El vértice.
   b. La concavidad.
   c. El eje de simetría.
   d. El valor máximo o mínimo de la función.
   e. El dominio.
   f. El rango (alcance).
   g. La/Las intersección/es con el eje horizontal.
   h. La intersección con el eje vertical.
   i. La forma estándar de la función.
3. Resolverán problemas de caída libre de objetos.
4. Resolverán problemas de optimización utilizando el modelo cuadrático.

El valor máximo o mínimo de una función es el valor más grande o más pequeño de una función en un intervalo. Para una función que representa la ganancia (utilidad) en un negocio, se estaría interesado en el valor máximo de la función (ganancia máxima); para una función que representa la cantidad de material en un proceso de manufactura, se estaría interesado en el valor mínimo de la función. Este tipo de problema se conocen como problemas de optimización (buscar la mejor forma de). El modelo cuadrático se aplica en diferentes problemas de optimización, pues el vértice del modelo cuadrático es el punto máximo o el punto mínimo de la función, éste depende de la concavidad de la función, por tal razón en el vértice encontramos este valor.

En este módulo repasaremos las características más importantes del modelo cuadrático y discutiremos diferentes representaciones de las mismas. Además, aplicaremos el modelo cuadrático para resolver problemas de caída libre y optimización.

Definición 3.1: Función cuadrática

Sean a, b y c números reales con $a \neq 0$, la función f de los reales en los reales es una ***función cuadrática*** cuando

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

Cuando la ecuación de una función cuadrática tenga la forma anterior, diremos que la función está presentada en la ***forma general***. La gráfica de la función cuadrática se llama ***parábola*** (véase la Figura 1).

El ***dominio*** de la función cuadrática es el conjunto de todos los números reales. Más adelante discutiremos cómo determinar el ***rango*** (***alcance***) de la función cuadrática.

f(x)=(x-2)^2-3 f(x)=-(x+2)^2+3

$a > 0$ $a < 0$

Figura 1

A continuación discutiremos las propiedades de la función cuadrática y su gráfica.

Propiedades de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$	Ejemplo: sea $f(x) = 2x^2 - x - 1$	Gráfica
1. La gráfica de la función cuadrática es una parábola cóncava hacia arriba cuando $a > 0$ o cóncava hacia abajo cuando $a < 0$.	Notemos que para la función f, $a = 2$; $b = -1$; $c = -1$. Como $a > 0$ la gráfica es una parábola cóncava hacia arriba.	

2. Toda parábola tiene un punto en donde alcanza un máximo o un mínimo y cambia de dirección. Este punto se llama ***vértice*** de la parábola. El vértice nos ofrece mucha información sobre la parábola y es muy fácil de determinar. El vértice es el punto (h,k) donde, $$h=\frac{-b}{2a}$$ $$k=f\left(\frac{-b}{2a}\right)$$	Como, $h=\frac{-(-1)}{2(2)}=\frac{1}{4}$ $$k=f\left(\frac{1}{4}\right)=2\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4}-1=-\frac{9}{8}$$ Por lo tanto, el vértice es el punto $\left(\frac{1}{4},-\frac{9}{8}\right)$.	
3. El vértice será el punto mínimo de la función cuadrática cuando *a* > 0. En tal caso k será el valor mínimo de la función. Cuando *a* < 0, el vértice es el punto máximo de la función y k es el valor máximo de la función.	Como la función es cóncava hacia arriba (*a* > 0), el vértice es el punto mínimo de la función y $-\frac{9}{8}$ es el valor mínimo de la función.	
4. Toda parábola es simétrica a la línea vertical que pasa por el vértice, esta línea se conoce como ***eje de simetría***. La ecuación del eje de simetría es $x=h$.	La gráfica de la función es simétrica a la línea $x=\frac{1}{4}$.	
5. Como mencionamos anteriormente el dominio de la función cuadrática es el conjunto de los números reales. El rango (alcance) de la función depende de su concavidad y del vértice, veamos. $$rango=\begin{cases}[k,\infty), si\ a>0\\(\infty,k], si\ a<0\end{cases}$$	Como la función es cóncava hacia arriba (*a* > 0), el rango de la función es el intervalo $\left[-\frac{9}{8},\infty\right)$.	El rango de la función se muestra en rojo en el eje vertical.

6. Toda parábola intercepta el eje vertical (eje *y*) en el punto (0, *c*). Por tal razón, decimos que *c* es el intercepto en el eje vertical.	La gráfica de la función intercepta el eje vertical (eje *y*) en el punto (0, -1), -1 es el intercepto en el eje vertical.	
7. La gráfica de la función cuadrática puede tener hasta dos interceptos en el eje horizontal (eje *x*). Estos son, las soluciones reales de la ecuación cuadrática: $$ax^2 + bx + c = 0 \quad (2).$$ Recordemos que la ecuación (2) puede tener dos, una o ninguna solución real, por tal razón la gráfica de función cuadrática puede tener dos, uno o ningún intercepto con el eje horizontal.	Para determinar los interceptos en el eje horizontal (eje *x*), resolvemos la ecuación cuadrática: $$2x^2 - x - 1 = 0$$ $$(2x - 1)(x + 1) = 0$$ $$x = \frac{1}{2} \ o \ x = -1.$$ Por lo tanto, la gráfica de la función intercepta el eje horizontal en los puntos $\left(\frac{1}{2}, 0\right) \ y \ (-1, 0)$.	

Nota: Otra forma de expresar la función cuadrática es la ***forma estándar***

$$f(x) = a(x - h)^2 + k \quad (3)$$

Donde (h, k) es el vértice de la parábola; la parábola abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.

En el ejemplo anterior, el vértice de la función $f(x) = 2x^2 - x - 1$ es $\left(\frac{1}{4}, -\frac{9}{8}\right)$ y $a = 2$, entonces la forma estándar de la función es $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$.

Recordemos:

Si $a > 0$, entonces el ***valor mínimo*** de *f* ocurre en $x = h$ y su valor es $f(h) = k$.

Si $a < 0$, entonces el ***valor máximo*** de *f* ocurre en $x = h$ y su valor es $f(h) = k$.

Ejemplo 1: Considere la función cuadrática $f(x) = -x^2 + x + 2$.

a. Determine el vértice.
b. Determine el valor máximo o mínimo de *f*.
c. Determine el eje de simetría.
d. Determine intercepto en el eje vertical.
e. Determine los interceptos en el eje horizontal, si tiene.
f. Exprese *f* en forma estándar.
g. Trace la gráfica de *f*.

Solución: Notemos que *a* = -1, *b* = 1 y *c* = 2.

a. $h = \frac{-(1)}{2(-1)} = \frac{1}{2}\ y\ k = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{9}{4}$, por lo tanto el *vértice* es $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

b. Como *a* < 0, el *valor máximo* de *f* es $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$ y ocurre cuando $x = \frac{1}{2}$.

c. El *eje de simetría* de la gráfica de *f* es la línea vertical $x = \frac{1}{2}$.

d. El intercepto en el eje vertical es 2, esto es, la gráfica *f* intercepta el eje vertical en el punto (0, 2).

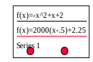
e. Para determinar los interceptos en el eje vertical, si existen, determinamos las soluciones reales de la siguiente ecuación cuadrática:

$$-x^2 + x + 2 = 0$$
$$(-x + 2)(x + 1) = 0$$
$$x = 2\ o\ x = -1$$

Por lo tanto, la gráfica de *f* intercepta el eje horizontal en los puntos (0, 2) y (0, -1).

f. Como el vértice de *f* es $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ y *a* = -1, entonces la *forma estándar* de la función es $f(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$.

g. A continuación la gráfica de *f*:



Ejemplo de práctica 1: Considere la función cuadrática $f(x) = x^2 + 3x - 4$.

a. Determine el vértice.
b. Determine el valor mínimo o mínimo de *f*.
c. Determine el eje de simetría.
d. Determine intercepto en el eje vertical.
e. Determine los interceptos en el eje horizontal, si existen.
f. Exprese *f* en forma estándar.
g. Trace la gráfica de *f*.

Aplicaciones

Ahora discutiremos algunas aplicaciones que pueden modelarse usando funciones cuadráticas.

Una de las aplicaciones clásicas de la función cuadrática es ***la caída libre***. La caída libre ocurre al soltar o lanzar un objeto en movimiento vertical cerca de la superficie de la tierra (suelo). Suponemos que la estructura del objeto es lo suficientemente pequeña y compacta de manera que la resistencia del aire puede ignorarse. Para la descripción del movimiento colocamos un sistema de coordenadas de forma vertical, apuntando hacia arriba, y cuyo origen estará en el suelo (véase Figura 2). Usando esos convenios, tenemos un movimiento uniformemente acelerado con la aceleración igual a $-g$, donde g es la aceleración de gravedad (dicha aceleración es constante cerca de la superficie de la tierra y tiene un valor aproximado de 32 ${pies}/{seg^2}$ en las unidades del sistema inglés y 9.8 ${m}/{seg^2}$ en el sistema métrico internacional). El signo negativo indica que la dirección de la aceleración es contraria al sentido positivo que hemos escogido para la posición. Es fácil demostrar que la posición s del objeto, después de haber transcurrido t unidades de tiempo desde su lanzamiento, está dada por

NOTA HISTÓRICA

EL FÍSICO Y ASTRÓNOMO MÁS IMPORTANTE DEL SIGLO XVI, GALILEO, FUE EL PRIMERO EN DESCUBRIR QUE LA DISTANCIA QUE RECORRE UN OBJETO EN SU CAÍDA ES PROPORCIONAL AL CUADRADO DEL TIEMPO QUE TARDA EN CAER.

$$s = -\frac{1}{2}g^2 + v_0 t + s_0 \qquad (4)$$

donde v_0 es la velocidad inicial del objeto y s_0 es la posición inicial del objeto.

Como g, s_0 y v_0 son constantes, se tiene que la posición s es una función cuadrática de la variable t y escribimos $s(t) = -\frac{1}{2}t^2 + v_0 t + s_0$ (5).

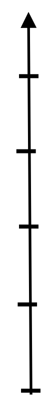


Figura 2

Ejemplo 2: Se lanza un objeto verticalmente hacia arriba desde una altura de 20 metros y con una rapidez inicial de 30 m/seg. Determine:

a. La ecuación de su trayectoria.

b. La altura del objeto luego de 2 segundos de su lanzamiento.

c. La altura máxima que alcanza el objeto.

d. En qué momento cae al suelo.

Solución: En este caso, la posición inicial s_0 es igual a 20 metros y como la dirección del lanzamiento (hacia arriba) es la misma que la dirección del sistema de coordenadas, tenemos que la velocidad inicial v_0 será positiva e igual a 30 m/seg.

a. Al sustituir en (5) obtenemos

$$s(t) = -\frac{1}{2}(9.8)t^2 + 30t + 2 = -4.9t^2 + 30t + 20$$

b. La altura del objeto luego de 2 segundos de su lanzamiento se obtiene al evaluar la función posición en $t = 2$. Estos es,

$s(2) = -4.9(2)^2 + 30(2) + 20 = 60.4$ metros.

c. Como la función posición es una función cuadrática cuya gráfica es una parábola cóncava hacia abajo, el valor máximo de la función se encuentra en el vértice. Esto es,

$$h = -\frac{30}{2(-4.9)} \approx 3.06$$

$$k \approx s(3.06) = -4.9(3.06)^2 + 30(3.06) + 20 \approx 65.92$$

la altura máxima que alcanza el objeto es aproximadamente 65.92 metros y la obtiene luego de aproximadamente 3.06 segundos de su lanzamiento.

d. Para determinar el momento en que cae el objeto, recordemos que al tocar el suelo $s = 0$. Por tal razón, tenemos que resolver la siguiente ecuación cuadrática:

$$-4.9t^2 + 30t + 20 = 0.$$

Al aplicar la fórmula cuadrática $\left(t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$, obtenemos:

$$t = \frac{-30 \pm \sqrt{(30)^2 - 4(-4.0)(20)}}{2(-4.9)} \approx \begin{cases} -0.61 \\ 6.73 \end{cases}$$

Obviamente la solución negativa no es plausible, así que al cabo de aproximadamente 6.73 segundos, luego de haber lanzado el objeto, éste cae al suelo.

Ejemplo de práctica 2: Se deja caer una pelota del punto más alto del Arco de San Luis Missouri, que se encuentra a 630 pies de altura. Determine:

a. La ecuación que describe la altura de la pelota.

b. La altura de la pelota luego de 2 segundos de dejarla caer.

c. En qué momento cae al suelo.

Otra de las aplicaciones clásicas de la función cuadrática es la optimización (buscar la mejor forma de) de situaciones. Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 3: Entre todos los pares de números cuya suma es 100, determinar el par cuyo producto es lo máximo posible.

Solución: Sean *x* y *y* estos números. Sabemos que $x + y = 100$, por lo tanto, $y = 100 - x$. Su producto es

$$P = xy = x(100 - x) = -x^2 + 100x$$

Por lo tanto, necesitamos obtener para que valor de x la función $P(x) = -x^2 + 100x$ asume su valor máximo. Obviamente en el vértice se encuentra el valor máximo de la función, esto es,

$$x = \frac{-100}{2(-1)} = 50$$

Cuando $x = 50$, $y = 100 - 50 = 50$, por lo tanto, los dos números son 50 y 50. (Note que el valor máximo de P es $P(50) = 50(100 - 50) = 2{,}500.$)

Ejemplo de práctica 3: Encuentre dos números positivos cuya suma es 100 y la suma de sus cuadrados es mínima.

Ejemplo 4: Un granjero tiene 2,400 pies de cerca y desea cercar un campo rectangular que está a lo largo de un río recto. No necesita cercar a lo largo del río. ¿Cuáles son las dimensiones del campo que tiene el área máxima?

Solución: Sean *x* y *y* el ancho y largo del campo rectangular, respectivamente. Sabemos que $2x + y = 2{,}400$, por lo tanto, $y = 2{,}400 - 2x$.

El área del campo rectangular es

$$A = xy = x(2400 - 2x) = -2x^2 + 2400x$$

$$A(x) = -2x^2 + 2400x$$

Necesitamos obtener el valor de x en donde la función A obtiene si valor máximo, que obviamente es la abscisa del vértice.

$$x = \frac{-(2400)}{2(-2)} = 600$$

Por lo tanto, las dimensiones son 600 pies de ancho y $2{,}400 - 2(600) = 1{,}200$ pies de largo. (Note que el área máxima es $A(600) = 600(1{,}200) = 720{,}000\ pies^2.$)

Ejemplo de práctica 4: Una granja lechera tiene un establo de 150 pies de longitud y 75 pies de ancho. El propietario tiene 240 pies de cerca y tiene planificado usarlos todos en la construcción de dos corrales externos adyacentes, con parte del lado largo del establo como un lado de los corrales y una cerca común entre los dos. El propietario quiere que los corrales sean tan grandes como resulte posible.

a. Construye un modelo matemático para el área combinada de ambos corrales.
b. Determina las dimensiones que produce la máxima área combinada.
c. Determina el área máxima combinada.

Ejemplo 5: La velocidad a que se conduce un carro puede tener un gran efecto sobre el consumo de gasolina por milla. Con base en las estadísticas de la EPA para vehículos compactos, la función

$$M(v) = -0.025v^2 + 2.45v - 30, \qquad 30 \leq v \leq 65$$

modela las millas promedio por galón para carros compactos, en términos de la velocidad de conducción v (en millas por hora).

a. Determina las millas por galón de un carro compacto que es conducido a 40 millas por hora.
b. Luis, propietario de un vehículo compacto, desea conocer a qué velocidad debe conducir su carro para maximizar las millas por galón. Determina la velocidad a la que debe conducir Luis.
c. Si el vehículo de Luis tiene un tanque de 15 galones, ¿cuántas millas podrá conducirlo con el tanque lleno manejando a la velocidad encontrada en la parte b?

Solución:

a. Para determinar las millas por galón evaluamos la función M,

$$M(40) = -0.025(40)^2 + 2.45(40) - 30 = 28 \text{ millas por galón.}$$

b. Como la función es cuadrática el valor máximo se encuentra en el vértice, esto es,

$$v = \frac{-(2.45)}{2(-0.025)} = 49 \text{ millas por hora.}$$

c. Si Luis conduce a 49 mph, al sustituir en M obtenemos,

$$M(49) = -0.025(49)^2 + 2.45(49) - 30 = 30.025 \text{ millas por galón.}$$

Por lo tanto, con el tanque lleno Luis podrá conducirlo por

$$15(30.025) = 450.375 \text{ millas.}$$

Ejemplo de práctica 5: La función

$$M(v) = -0.025v^2 + 2.46v - 35, \qquad 30 \leq v \leq 65$$

modela las millas promedio por galón para carros de cuatro puertas, en términos de la velocidad de conducción v (en millas por hora).

a. Determina las millas por galón de un carro cuatro puertas que es conducido a 45 millas por hora.

b. Evelyn, propietaria de un vehículo de cuatro puertas, desea conocer a qué velocidad debe conducir su carro para maximizar las millas por galón. Determina la velocidad a la que debe conducir Evelyn.

c. Si el vehículo de Evelyn tiene un tanque de 25 galones, ¿cuántas millas podrá conducirlo con el tanque lleno manejando a la velocidad encontrada en la parte b?

Los investigadores de accidentes automovilísticos, a menudo usan la longitud de las marcas de gomas al frenar para aproximar la velocidad de los vehículos involucrados en un accidente. La longitud de la marca de frenado depende de varios factores, que incluyen la fabricación y el peso del vehículo, la superficie de la carretera y las condiciones de la carretera al momento del accidente. Los investigadores realizan pruebas para determinar la longitud de la marca de frenado para diferentes vehículos bajo distintas condiciones.

Ejemplo 6: Un modelo para la longitud (en pies) de la marca de frenado en asfalto húmedo es

$$L(v) = 0.06v^2 - 0.42v + 6.6$$

donde v es la velocidad en millas por hora.

a. Determina la marca de frenado de un vehículo que viaja a 25 millas por hora.
b. Determina la velocidad a la que un vehículo estaba viajando si dejo una marca de frenado de 150 pies de longitud.

Solución:

a. Para determinar la marca de frenado evaluamos la función L,

$$L(25) = 0.06(25)^2 - 0.42(25) + 6.6 = 33.6 \text{ pies.}$$

b. Para determinar la velocidad a partir de la marca de frenado debemos resolver la ecuación cuadrática $0.06v^2 - 0.42v + 6.6 = 150$.

$$0.06v^2 - 0.42v + 6.6 = 150$$

$$0.06v^2 - 0.42v - 143.4 = 0$$

$$v = \frac{0.42 \pm \sqrt{(-0.42)^2 - 4(0.06)(-143.4)}}{2(0.06)} \approx \begin{cases} 49.4 \\ -48.6 \end{cases}$$

Obviamente descartamos la velocidad negativa, lo que implica que el vehículo viajaba aproximadamente a 49.4 millas por hora.

Ejemplo de práctica 6: Un modelo para la longitud de la marca de frenado sobre concreto seco es

$$L(v) = 0.035v^2 + 0.15v - 1.6$$

donde v es la velocidad en millas por hora.

a. Determina la marca de frenado de un vehículo que viaja a 30 millas por hora.
b. Determina la velocidad a la que un vehículo estaba viajando si dejo una marca de frenado de 100 pies de longitud.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. a. $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-25}{4}\right)$ b. $\frac{-25}{4}$ c. $x = \frac{-3}{2}$ d. -4 e. 1, -4 f. $f(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$
   g.

2. a. $s(t) = -16t^2 + 630$ b. 566 pies c. Aproximadamente 6.3 segundos.
3. 50 y 50
4. a. $A(x) = -3x^2 + 240x$, donde x es el ancho de los corrales. b. 40 pies ancho y 120 pies de largo. c. 4,800 pies cuadrados.
5. a. 25.075 millas por galón b. 49.2 millas por hora c. 637.9 millas
6. a. 34.4 pies b. Aproximadamente 52 millas por hora.

Ejercicios de práctica

En los problemas 1 a 5, halla el vértice y el eje de simetría de la parábola.

1. $y = x^2 - 8$
2. $y = -x^2 - 2x$
3. $y = x^2 + 6x + 8$
4. $y = 2x^2 - 20x + 57$
5. $y = -3x^2 + 6x - 2$

En los problemas 6 a 10, se da una función cuadrática, determine el valor máximo o mínimo, exprese la función de la forma estándar y trace su gráfica.

6. $f(x) = 2x - x^2$
7. $f(x) = x + x^2$

8. $f(x) = x^2 + 2x - 1$
9. $f(x) = 1 - 6x - x^2$
10. $f(x) = 3x^2 - 12x + 13$

En los problemas 11 a 15, determina la ecuación de una función cuadrática cuya gráfica satisface las condiciones dadas.

11. Vértice: (2, 4); intercepto en *y*: -4
12. Vértice: (4, 9); intercepto en *y*: -7
13. Vértice: (2, 4); intercepto en *x*: 4
14. Vértice: (4, 8); intercepto en *x*: 6
15. Vértice: (-5, -25); punto adicional en la gráfica (-2, 20)
16. Halla el producto mínimo de dos números cuya diferencia es 30.
17. Halla el producto máximo de dos números cuya suma es 60.
18. Un criador de caballos planifica construir un corral junto a un establo que tiene 50 pies de longitud, usando todo el establo como un lado del corral. Tiene 250 pies de cerca disponibles y quiere usarlos todos.
    a. Expresa el área *A* del corral con una función del ancho *x*.
    b. Halla el valor de *x* que produce el área máxima.
    c. ¿Cuáles son las dimensiones del corral con el área máxima?
19. Una bolsa de arena cae desde un globo a una altura de 10,000 pies. ¿Cuándo golpeará la bolsa de arena el suelo?
20. Un bromista deja caer un globo de agua desde el techo de un edificio de 144 pies de altura. ¿Cuándo golpeará el globo el suelo?
21. Un clavadista golpea el agua 2.5 segundos después de lanzarse desde el risco. ¿Cuál es la altura del risco?
22. Un guarda bosques deja caer una taza de café desde una torre de vigilancia. Si la tasa golpea el suelo 1.5 segundos después, ¿cuál es la altura de la torre?
23. Una flecha lanzada verticalmente al aire, desde el suelo, llega a una altura máxima de 484 pies después de 5.5 segundos de vuelo. Sea la función cuadrática $d(t)$ la que representa la distancia por encima del suelo (en pies) *t* segundos después de lanzar

la flecha. (Si no se tiene en cuenta la resistencia del aire, un modelo cuadrático suministra una buena aproximación para el vuelo de un proyectil).

a. Determina $d(t)$.
b. ¿En qué momentos (hasta dos lugares decimales) la flecha estará a 200 pies por encima del suelo?

24. Un modelo para la longitud, en pies, de la marca de frenado para cierto vehículo cuando frena de emergencia es

$$L(v) = 0.061v^2 + 1.23v + 2.64$$

donde v es la velocidad en millas por hora.

a. Determina la marca de frenado del vehículo si viaja a 30 millas por hora.
b. Determina la velocidad a la que un vehículo estaba viajando si dejo una marca de frenado de 150 pies de longitud.

25. El modelo cuadrático para el consumo de cerveza per cápita (en galones) en los Estados Unidos a partir del año 1990 es

$$C(x) = -0.0006x^2 + 0.03x + 1$$

a. ¿Cuándo (al año más cercano) regresaría el consumo al nivel de 1990?
b. ¿Qué predice este modelo para el consumo de cerveza en el año 2020?

Respuestas a los ejercicios de práctica

1. Vértice (0, -8); Eje de simetría x = 0 (eje de y)
2. Vértice (-1, 1); Eje de simetría x = -1
3. Vértice (-3, -1); Eje de simetría x = -3
4. Vértice (5, 7); Eje de simetría x = 5
5. Vértice (1, 1); Eje de simetría x = 1
6. Máximo $f(1) = 1$; $f(x) = -(x-1)^2 + 1$

f(x)=-(x-1)^2+1

7. Mínimo $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$; $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

f(x)=(x+.5)^2+.25

8. Mínimo $f(-1) = 0$; $f(x) = (x+1)^2$

9. Máximo $f(-3) = 10$; $f(x) = -(x+3)^2 + 10$

10. Mínimo $f(2) = 1$; $f(x) = 3(x-2)^2 + 1$

11. $f(x) = -2x^2 + 8x$
12. $f(x) = -x^2 + 8x - 7$
13. $f(x) = -x^2 + 4x$
14. $f(x) = -2x^2 + 16x - 8$
15. $f(x) = 5x^2 + 50x + 100$
16. 225

17. 900
18. a. $A(x) = -2x^2 + 250x$ b. 62.5 c. ancho = 62.5 pies; largo = 125 pies.
19. 25 segundos
20. 3 segundos
21. 100 pies
22. 36 pies
23. a. $d(t) = -16t^2 + 176t$ b. Aproximadamente al cabo de 1.29 seg. y 9.71 seg.
24. a. 94.44 millas b. Aproximadamente 40 millas por galón.
25. a. 2,040 b. 1.36 galones