1.1 Funciones lineales

Objetivos: Al finalizar el estudiante,

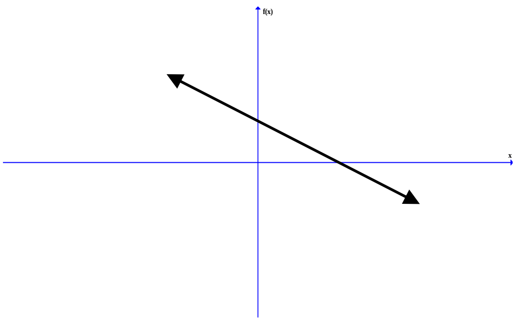
- Definirá la función lineal.
- Reconocerá la pendiente como una razón de cambio.
- Interpretará la pendiente en una situación real.
- Determinará la ecuación de la recta que pasa a través de dos puntos.
- Determinará la ecuación de la recta que pasa por un punto y la pendiente es conocida.

En la vida cotidiana, existen relaciones entre dos variables que pueden representarse por medio de una gráfica lineal. El modelo analítico y gráfico de una recta nos sirve para entender situaciones de la vida diaria que se caracterizan por tener una razón de cambio constante, como la tasa de crecimiento, pago de impuestos, interés simple de un capital, los ingresos, etc.

Por eso, es importante que conozcamos e identifiquemos las características algebraicas y geométricas del modelo lineal.

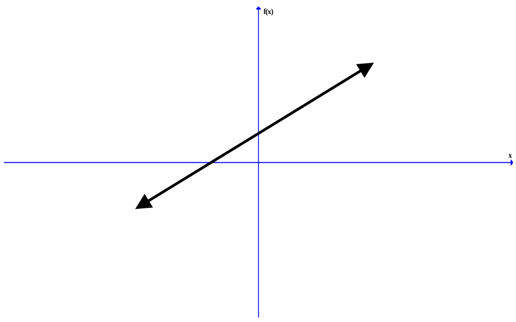
Definición 1: Función lineal
Sean m y b números reales con $m \neq 0$. Una función de la forma $f(x) = mx + b$ o $y = mx + b$ se conoce como ***función lineal***. El dominio de cualquier función lineal es el conjunto de los números reales. La gráfica de una función lineal es una recta con pendiente m e intercepto en el eje vertical b.

Propiedades de la gráfica de la función lineal f(x) = mx + b, $m \neq 0$



$m < 0$

La gráfica es una recta decreciente



$m > 0$

La gráfica es una recta creciente

Ejemplo 1: Determina la pendiente y los interceptos, y luego traza la gráfica de la función lineal $f(x) = \frac{3}{5}x - 3$.

Solución: Obviamente la pendiente es $\frac{3}{5}$ y el intercepto en el eje vertical (eje y) es -3. Para determinar el intercepto en el eje horizontal (eje x) resolvemos la ecuación f(x) = 0 para x:

$f(x) = 0$	Sustituimos $\frac{3}{5}x - 3$ por $f(x)$.
$\frac{3}{5}x - 3 = 0$	Multiplicamos por 5 en ambos lados de la ecuación.
$3x - 15 = 0$	Sumamos 15 en ambos lados de la ecuación
$3x = 15$	Dividimos ambos lados entre 3.
$x = \frac{15}{3} = 5$	Intercepto en el eje horizontal.

La gráfica de la función se muestra en la Figura 1.

Figura 1

Ejercicio de práctica 1: Determina la pendiente y los interceptos, y luego traza la gráfica de la función lineal $f(x) = -\frac{2}{3}x + 5$.

> ***Nota***: Una de las propiedades más importantes del modelo lineal es la pendiente, ésta nos ofrece información de cómo se relacionan las variables dependiente e independiente. Una de las interpretaciones más comunes de la pendiente es como una razón de cambio.

La pendiente como una razón de cambio

Si x y y son dos variables relacionadas por la ecuación $y = mx + b$ donde m y b son constantes con $m \neq 0$, entonces x y y están linealmente relacionadas. Si $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ son dos puntos distintos en esta recta, entonces la pendiente de la recta está definida por:

$$m = \frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x} = \frac{Cambio\ en\ la\ variable\ dependiente}{Cambio\ en\ la\ variable\ independiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$

Veamos la Figura 2.

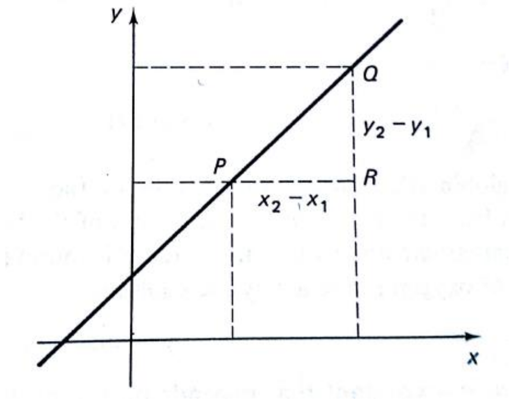


Figura 2

$$m = \frac{Cambio\ en\ la\ variable\ dependiente}{Cambio\ en\ la\ variable\ independiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En aplicaciones, la razón (1) se llama la ***razón de cambio*** de y con respecto a x o ***razón de cambio*** de *la variable dependiente* con respecto a *la variable independiente*. Como sabemos que la pendiente de una recta es única, *la razón de cambio de dos variables linealmente relacionadas es constante.* Estos son algunos ejemplos de razones de cambio familiares: millas por hora, revoluciones por minuto, precio por libra, precio por unidad, pasajeros por avión, etc. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2: La gráfica de la ecuación $y = 2x - 4$ es una línea recta como muestra la Figura 3.

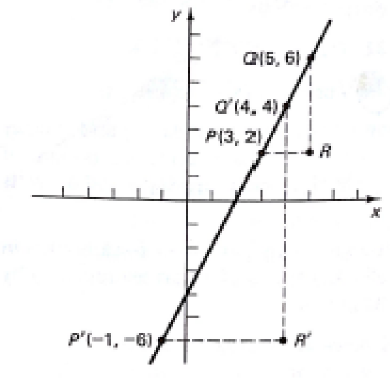


Figura 3

Si escogemos dos puntos sobre la línea, por ejemplo (3, 2) y (5, 6), identificados por *P* y *Q* en la figura. La diferencia entre las coordenadas en x de estos dos puntos, identificadas por *PR* en la figura, es el *cambio en x* (o *cambio en la variable independiente*) desde *P* hasta *Q*:

$$Cambio\ en\ x = PR = x_2 - x_1 = 5 - 3 = 2 \qquad Note: (x_1, y_1) = (3,2)\ y\ (x_2, y_2) = (5,6)$$

La diferencia entre las coordenadas en *y* de *P* y *Q*, identificadas por *QR* en la figura, es el *cambio en y* (o *cambio en la variable dependiente*) desde *P* hasta *Q*:

$$Cambio\ en\ y = QR = y_2 - y_1 = 6 - 2 = 4 \qquad Note: (x_1, y_1) = (3,2)\ y\ (x_2, y_2) = (5,6)$$

Notemos que el *cambio en y* es el doble del *cambio en x* o $m = \frac{Cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x} = \frac{4}{2} = 2$. Otra manera de interpretar la pendiente es que es la siguiente:

$$m = \frac{cambio\ en\ la\ variable\ dependiente}{cambio\ en\ la\ variable\ independiente} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2$$

Esto es, un aumento de 1 unidad en la variable independiente produce un aumento de dos unidades en la variable dependiente.

Como mencionamos anteriormente, la pendiente de una línea recta es única (o *la razón de cambio* de dos variables que se relacionan *linealmente* es constante). Veamos, tomemos los dos puntos $P' = (-1,6)\ y\ Q' = (4,4)$ sobre la gráfica dada (Figura 3). Entonces,

$$Cambio\ en\ x = P'R' = 4 - (-1) = 5\ ; \qquad Cambio\ en\ y = Q'R' = 4 - (-6) = 10$$

Veamos que nuevamente la razón $\frac{Cambio\ y}{cambio\ en\ x}$ es igual a 2.

La razón por la cual obtenemos el mismo resultado es ambos casos es que los triángulos PQR y $P'Q'R'$ son triángulos semejantes, por tal razón, las razones entre lados correspondientes son congruentes*.

Ejercicio de práctica 2: Traza la gráfica de la línea que pasa por los puntos (1, 2) y (3, 8), determina la pendiente, e interprétala en la gráfica.

Ejemplo 3**: Las dosis adecuadas de medicinas para animales y seres humanos con frecuencia se basan en el área de la superficie corporal (BSA por sus siglas en inglés *Body surface area*). Como el peso es mucho más fácil de determinar que la BSA, los veterinarios usan el peso de un animal para estimar la BSA. La siguiente ecuación lineal expresa la BSA para caninos en términos del peso***:

$$A = 16.21p + 375.6$$

Donde A es la BSA en pulgadas cuadradas y p es el peso en libras.

a. Interpreta la pendiente de la función A.

b. ¿Cuál es el efecto de un aumento de 2 libra en el peso?

Solución:

a. Notemos que la pendiente de la función es 16.21. Al interpretar la pendiente como una razón de cambio obtenemos:

* Este resultado no es importante para la discusión sobre el modelo lineal, simplemente es conocimiento general.

** Este ejemplo se encuentra en libro Barnett, Ziegler, Byleen y Sobecki (2011). *Precálculo séptima edición*, pág.148. MacGraw-Hill, Education.

***Con base en los datos de los Consultores de Oncología Veterinaria, PTY LTD.

$$m = \frac{Cambio\ en\ la\ variable\ dependiente}{Cambio\ en\ la\ variable\ independiente} = \frac{Cambio\ en\ BSA}{Cambio\ en\ peso}$$
$$= \frac{16.21\ pulgadas\ cuadradas}{1\ libra}$$
$$= 16.21\ pulgadas\ cuadradas\ por\ libra$$

Esto es, la razón de cambio de BSA con respecto al peso de 16.21 pulgadas cuadradas por libra, por lo tanto, por cada libra que el peso aumenta el BSA aumenta 16.21 pulgadas cuadradas.

b. Como la pendiente es 16.21 pulgadas cuadradas por libra, implica que un aumento de 2 libras produce un aumento 2(16.21) = 32.42 pulgadas cuadradas del BSA.

Ejercicio de práctica 3: La siguiente ecuación expresa el BSA para felinos en términos de peso:

$$A = 28.55p + 118.7$$

donde *A* es el BSA en pulgadas cuadradas y *p* es el peso en libras.

a. Interpreta la pendiente de la ecuación de BSA.

b. ¿Cuál es el efecto de un aumento de 2.5 libras en el peso?

Ejemplo 4: Un paciente en el Hospital Universitario, que se encuentra en una dieta líquida, tiene que escoger entre jugo de ciruela y jugo de china para satisfacer sus requerimientos diarios de tiamina, el cual es 1 miligramo (mg). Si necesita diariamente *c* onzas de jugo de ciruela y *f* onzas de jugo de china, el modelo que relaciona estas dos variables es;

$$f = -0.625c + 12.5 \qquad 0 \leq c \leq 20$$

a. Interpreta la pendiente de la función *f*.

b. ¿Cuál es el efecto de un aumento de 8 onzas de jugo de ciruela en la dieta?

Solución:

a. Notemos que la pendiente de la función es -0.625. Al interpretar la pendiente como una razón de cambio obtenemos:

$$m = \frac{Cambio\ en\ la\ variable\ dependiente}{Cambio\ en\ la\ variable\ independiente}$$

$$= \frac{Cambio\ en\ onzas\ jugo\ de\ china}{Cambio\ en\ onzas\ de\ jugo\ de\ ciruela}$$

$$= \frac{-0.625\ onzas\ jugo\ de\ china}{1\ onza\ de\ jugo\ de\ ciruela}$$

$$= -0.625\ onzas\ de\ jugo\ de\ china\ por\ onza\ de\ jugo\ de\ ciruela$$

Esto es, la razón de cambio de onzas de jugo de china con respecto a las onzas de jugo de ciruela es -0.625, por lo tanto, por cada onza que se aumente el jugo de ciruela en la dieta diariamente, disminuye 0.625 onzas de jugo de china en la dieta diariamente.

b. Como la pendiente es -0.625 onzas de jugo de china por jugo de ciruela, implica que un aumento de 8 onzas de jugo de ciruela en la dieta diariamente produce una disminución de 8(0.625) = 5 onzas de china en la dieta diariamente.

Ejercicio de práctica 4: Un paciente en el Hospital Universitario, tiene que escoger entre pasas secas y lentejas para satisfacer su requerimiento diario de proteínas, que es de 75 gramos (g). Si necesita diariamente l g de lentejas y p g de pasas secas, el modelo que relaciona estas dos variables es;

$$p = -\frac{26}{35}l + \frac{1500}{7} \qquad 0 \leq l \leq \frac{3750}{13}$$

a. Interpreta la pendiente de la función p.

b. ¿Cuál es el efecto de un aumento de 35 g de lentejas en la dieta?

¿Cómo determinar el modelo lineal?

Una pregunta básica que nos tenemos que hacer es, ¿Qué información es necesaria para determinar la ecuación de una línea recta? Recordemos, sabemos de la geometría euclidiana que dos puntos definen una y sólo una línea recta. Por tal razón, una vez conozcamos dos puntos, la recta es determinada.

Determinando la ecuación de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2)

La ecuación de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por la ecuación:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad (2)$$

Como $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$, al sustituir en (2) obtenemos:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (3)$$

La ecuación (3) se conoce como la forma *punto - pendiente*.

Si suponemos que la gráfica de la recta intercepta el eje vertical en *b*, esto es, el punto (0, *b*) es un punto sobre la gráfica de la recta. Al sustituir (0, *b*) en la ecuación (3) y despejar para la variable *y* obtenemos:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Sustituir (0, b) por (x_1, y_1) en la ecuación (3).

$$y - b = m(x - 0);$$

Sumamos *b* en ambos lados de la ecuación

$$y - b = mx$$

$$y = mx + b \quad (4)$$

Forma punto – intercepto en el eje vertical

La ecuación (4) se conoce como la forma *punto – intercepto en el eje vertical*.

Si generalizamos las fórmulas anteriores, concluimos que para determinar la ecuación de una recta necesitamos dos puntos por donde ésta pase o un punto y la pendiente. Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 5: Determine la ecuación de la línea que pasa por los puntos (5, -3) y (7, -7).

Solución: Sean $(x_1, y_1) = (5, -3)$ y $(x_2, y_2) = (7, -7)$, al sustituir en la ecuación (1) obtenemos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-7 - (-3)}{7 - 5} = \frac{-4}{2} = -2$$

Ahora al sustituir en la ecuación (3) y despejar la variable *y* obtenemos:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
Sustituir m = -2 y $(x_1, y_1) = (5, -3)$.

$$y - (-3) = -2(x - 5)$$
Rompe el paréntesis utilizando la propiedad distributiva.

$$y + 3 = -2x + 10$$
Restamos 3 en ambos lados de la ecuación.

$$y = -2x + 10 - 3$$
$$y = -2x + 7$$
Ecuación de la recta que pasa por los puntos (5, -3) y (7, -7). Notemos que al despejar la variable *y*, el coeficiente de la variable x es la pendiente y la constante, 7, es el intercepto en el eje vertical.

Ejercicio de práctica 5: Determine la ecuación de la línea que pasa por los puntos (-3, 2) y (1, 14).

Ejemplo 6: Determine la ecuación de la línea que pasa por el punto (-5, -3) y tiene pendiente igual a $\frac{2}{3}$.

Solución: Al sustituir $m = \frac{2}{3}$ y $(x_1, y_1) = (-5, -3)$ en la ecuación (3) y luego despejar para la variable *y* obtenemos:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
Sustituir $m = \frac{2}{3}$ y $(x_1, y_1) = (-5, -3)$.

$$y - (-3) = \frac{2}{3}[x - (-5)]$$
Rompe el paréntesis utilizando la propiedad distributiva.

$$y + 3 = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$$
Restamos 3 en ambos lados de la ecuación. Recordemos que $3 = \frac{9}{3}$.

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3} - \frac{9}{3}$$
$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$
Ecuación de la recta que pasa por el punto (-5, -3) y $m = \frac{2}{3}$. Notemos que al despejar la variable *y*, el coeficiente de la variable x es la pendiente y la constante, 1/3, es el intercepto en el eje vertical.

Ejercicio de práctica 6. Determine la ecuación de la línea que pasa por el punto (2, -1) y tiene pendiente igual a $-\frac{3}{4}$.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. $m = -\frac{2}{3}; intercepto\ en\ el\ eje\ vertical = 5$

   $intercepto\ en\ el\ eje\ horizontal = \frac{15}{2}$

2. $m = 1$. Se interpreta como la razón del cambio en y entre el cambio en x.

3. (a) Un aumento de 28.55 pulgadas cuadradas del BSA por cada libra que aumente.

   (b) Un aumento de 71.375 pulgadas cuadradas del BSA.

4. (a) Una disminución de 26 gramos de pasas secas en la dieta por cada 35 gramos de lentejas.

   (b) Una disminución de 26 gramos de pasas secas en la dieta.

5. $y = 3x + 11$

6. $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

Ejercicios de práctica para la sección 1.1

Determine la pendiente de la recta que pasa por cada par de puntos.

1. (3, 1) y 5, 7)
2. (6, -2) y (2, -6)
3. (1, 3) y (3, -7)
4. (2, 5) y (-3, 7)
5. (2/3, 1/2) y (-3, 4)

Determine la ecuación de la línea recta que satisface las siguientes condiciones. Trace un esquema de la gráfica.

6. Pasa a través del punto (-2, 5) con pendiente igual a 3.
7. Pasa a través del punto (-2, 5) con pendiente igual a -3.
8. Pasa a través del punto (-4, 2) con pendiente igual a 5.
9. Pasa a través de los puntos (-2, 5) y (3, -2).
10. Pasa a través de los puntos (-2, -5) y (2, -2).
11. Con pendiente -2 e intercepto en el eje vertical 3.
12. Con pendiente 3 e intercepto en el eje vertical -2.

Determine la pendiente y el intercepto en eje vertical para cada una de las siguientes relaciones lineales.

13. $3x + 5y = 15$
14. $2x = 13 - 4y$
15. $y + 2x + 6 = 0$
16. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 5$
17. A medida que el aire asciende, se expande y se enfría. La temperatura del aire *T* en grados Celsius a una altura de *a* kilómetros está dada aproximadamente por

$$T = -9a + 25$$

   a. Interpreta la pendiente.
   b. Completa la siguiente tabla:

a	0	1	2	3	4	5
T						

   c. Con base en la información de la tabla, escribe una descripción verbal sobre la relación entre la altitud y la temperatura.

18. A nivel del mar, el agua hierve cuando alcanza una temperatura de 212ºF. En alturas mayores, la presión atmosférica es menor y lo mismo ocurre con la temperatura a la cual el agua hierve. El punto de ebullición *E* en grados Fahrenheit a una altura de *a* pies está dado aproximadamente por

$$E = -0.0018a + 212$$

a. Interprete la pendiente.

b. Complete la siguiente tabla

a	0	5000	10000	15000	20000	25000	30000
E							

c. Con base en la información de la tabla, escribe una descripción verbal sobre la relación entre la altitud y la temperatura.

19. La dosis que se recomienda, para un adulto, de un medicamento (*d* medida en mg) se relaciona linealmente con la dosis aceptable (*C*) para un niño de edad *a*, en años, de la siguiente forma:

$$C = 0.0417d(a + 1)$$

Suponga que la dosis para un adulto es de 200 mg.

a. Determine la pendiente.

b. Interprete la pendiente.

c. ¿Cuál es la dosis para un niño de 5 años?

20. Algunos científicos opinan que la temperatura superficial promedio del mundo está aumentando en forma constante. La temperatura superficial promedio se expresa mediante

$$T = 0.02t + 8.50$$

donde *T* es la temperatura en ºC y *t* es años desde 1900.

a. Interpreta la pendiente.

b. Interpreta el intercepto en el eje vertical (eje *T*).

c. Utilice la ecuación para predecir la temperatura superficial promedio del mundo en 2100?

1.2 El modelo lineal

Objetivos: Al finalizar el estudiante:

- Definirá el concepto *modelo matemático*.
- Utilizará el modelo lineal para modelar situaciones de las ciencias naturales.

La mayoría de las personas están familiarizadas con la palabra modelo pero la conceptualizan de forma diferente. Hemos visto los modelos profesionales que desfilan con las modas más recientes, los modelos a escala de los carros o los modelos que utilizan los pintores para desarrollar sus obras, entre otros. En las matemáticas el concepto tiene diferente significado, estudiamos los *modelos matemáticos* para luego aplicarlos a diferentes situaciones, con el propósito, en general, de predecir con "precisión".

Definición 1: Modelo matemático
Un ***modelo matemático*** es un esquema, una ecuación, un diagrama o una teoría que representa matemáticamente una situación (la situación puede ser real, se aprecia por los sentidos, o teórica, por ejemplo las geometrías no euclidianas en su conceptualización).

Los *modelos matemáticos* afectan directamente nuestras vidas. Por ejemplo, los modelos matemáticos se utilizan para asegurarse que un puente no colapse, para predecir cómo los cambios económicos afectarán el desempleo y para aprender por qué algunos años hay más huracanes que en otros. Entender los principios del modelaje matemático es crucial para entender los "issues" actuales.

Los *modelos matemáticos* se basan en la relación entre cantidades que están cambiando, como la velocidad del viento y la presión sobre un puente o la productividad de un obrero y el desempleo. Estas relaciones son descritas por herramientas matemáticas llamadas *funciones*. En esencia, *la función es la base conceptual del modelaje matemático*. Algunos modelos matemáticos consisten de solamente una función, que podemos representar con una simple ecuación o gráfica. Otros modelos, como aquellos usados para estudiar el clima terrestre, pueden involucrar miles de funciones y requieren de supercomputadoras para su análisis. Pero la idea básica de una función, en ambos casos, es la misma. En esta sección estudiaremos el modelo lineal ($y = mx + b, m \neq 0$) y cómo aplicarlo en modelaje de situaciones de las ciencias naturales.

Comenzaremos familiarizándonos con los conceptos *variable*, *variable independiente*, *variable dependiente* y *notación funcional*.

NOTA HISTÓRICA

Los matemáticos trabajaron con funciones por siglos antes de desarrollar la notación estándar (tradicional). Alrededor de 1670, el filósofo Alemán Gottfried Leibniz uso la notación $f(x)$ para denotar una función. Pero no es hasta alrededor de 1734, cuando el matemático Suizo Leonhard Euler adopto la misma notación, que la notación $f(x)$ fue ampliamente aceptada.

Definiciones

Variable – Cantidad que cambia o varía. (2)

Variable Independiente - Variable a la que se le asignan valores. (3)

Variable Dependiente - Variable que cambia de acuerdo cambia la variable independiente (depende de la variable independiente). (4)

Notación funcional – Cuando y representa la variable dependiente y x la variable independiente podemos escribir $y = f(x)$, esta notación se conoce como la ***notación funcional***. (5)

Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1: Luis está viajando en un globo de aire caliente. Mientras el balón sube la presión atmosférica disminuye haciendo que sus oídos se “tapen”.

a. Identifica las variables.

b. Describe la relación entre estas variables utilizando la notación funcional $y = f(x)$.
c. Expresa la función verbalmente.

Solución:

a. Las variables son altura del globo, *variable independiente*, y la presión atmosférica, *variable dependiente*.

b. Si llamamos *a* la altura del globo y *p* la presión atmosférica, entonces $p = f(a)$.

c. La presión depende de la altura, esto es, la presión cambia con respecto a la altura.

Ejercicio de práctica 1: Luis navegaba en una balsa en el río La Plata. Luis observa que el ancho del río cambia mientras viajas a favor de la corriente.

a. Identifica las variables.
b. Describe la relación entre estas variables utilizando la notación funcional $y = f(x)$.
c. Expresa la función verbalmente.

Cuando utilizamos la notación funcional podemos escribir el modelo lineal ($y = mx + b, m \neq 0$) de la forma

$$f(x) = mx + b, \;\; m \neq 0 \qquad (6)$$

Donde, *x* representa la variable independiente y *f*(*x*) la variable dependiente (recordemos que $m = \frac{cambio\ de\ la\ variable\ dependiente}{cambio\ de\ la\ variable\ independiente}$ y b el intercepto en el eje vertical).

El ***modelaje matemático*** es el proceso de usar las matemáticas para resolver problemas del mundo real. Este proceso, aunque no necesariamente es lineal, puede dividirse en cuatro pasos (Figura 1).

Paso 1. *Entienda el problema.* Usted no puede resolver una situación si no entiende lo que se le pide encontrar. El problema debe ser leído y analizado cuidadosamente. Es probable que necesite leerlo varias veces. Identifique las variables.

Paso 2. *Construir* el *modelo matemático* que se ajuste a la situación dada.

Paso 3. *Resolver* el modelo matemático.

Paso 4. *Interpretar* la solución del modelo matemático en términos del problema original.

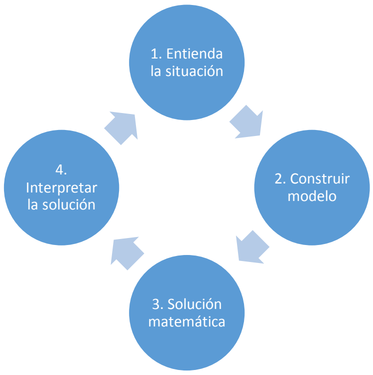


Figura 1

En problemas más complejos, este ciclo puede repetirse varias veces para obtener la información requerida sobre el problema planteado. En este módulo, estudiaremos uno de los modelos matemáticos más simples, el modelo lineal.

Modelos lineales

Usaremos los conocimientos adquiridos con las rectas en la Sección 1-1 para construir modelos lineales para aplicaciones con cantidades relacionadas linealmente. Veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2: La presión atmosférica a una altura de 5000 pies es de 25 pulgadas de mercurio. A medida que la altura aumenta, la presión atmosférica disminuye linealmente. Si a una altura de 10000 pies la presión atmosférica es 22 pulgadas de mercurio, determine:

a. El modelo lineal que relaciona la presión atmosférica con la altura.

b. Interprete la pendiente.

c. Determine la presión atmosférica a una altura de 25000 pies.

Solución:

a. Comenzamos identificando las variables apropiadas:

Sea

P = presión atmosférica (variable dependiente)

a = altura (variable independiente)

Notemos que podemos definir dos puntos de la forma (a, P), estos son, (5000, 25) y (10000, 22). Como la relación es ***lineal***, entonces la pendiente de la recta que une estos puntos es

$$m = \frac{cambio\ variable\ dependiente}{cambio\ veriable\ independiente} = \frac{P_2 - P_1}{a_2 - a_1} = \frac{22 - 25}{10000 - 5000} = -\frac{3}{5000}$$

y la ecuación es

$$P - 25 = -\frac{3}{5000}(a - 5000)$$
$$P = -\frac{3}{5000}a + 28$$
$$P = -0.0006a + 28$$
$$o \qquad P(a) = -0.0006a + 28 \qquad (7)$$

b. La razón de cambio de la presión con respecto a la altura es de -0.0006 pulgadas de mercurio por pie. La presión atmosférica disminuye 0.0006 pulgadas de mercurio por cada pie que la altura aumenta.

c. Si a = 25000, entonces al sustituir en la ecuación (7) obtenemos

$$P(25000) = -0.0006(25000) + 28 = 13\ pulgadas\ de\ mercurio$$

Ejercicio de práctica 2: La velocidad del sonido a través del aire cerca del nivel del mar está relacionada linealmente con la temperatura del aire. Si el sonido viaja a 741 mph a 32ºF y a 771 mph a 72ºF, determine:

a. El modelo lineal que relaciona la velocidad del sonido (S) y la temperatura del aire (t).

b. Interprete la pendiente.

c. Determine la velocidad del sonido si la temperatura del aire es de 85ºF.

Ejemplo 3: El etilenglicol y el propilenglicol son líquidos que se usan en soluciones anticongelantes y descongelantes. El etilenglicol se encuentra en la lista de sustancias químicas peligrosas de la Agencia de Protección Ambiental, mientras que el propilenglicol generalmente se considera seguro. En la Tabla 1 se indica los porcentajes de concentración de la solución y los puntos de congelación correspondientes para cada sustancia química.

Concentración	Etilenglicol	Propilenglicol
20%	15ºF	17ºF
50%	-36ºF	-28ºF

Tabla 1

a. Supongamos que la concentración y el punto de congelación del etilenglicol están relacionados linealmente. Construye un modelo lineal para el punto de congelación.

b. Interpreta la pendiente de la parte a.

c. ¿Qué porcentaje (hasta un lugar decimal) de etilenglicol resultará en un punto de congelación de –10°F?

Solución:

a. Comenzamos identificando las variables apropiadas:

Sea

C = punto de congelación de la solución (variable dependiente)

p = porcentaje de etilenglicol en la solución (variable independiente)

Notemos que de la Tabla 1 podemos definir dos puntos de la forma (p, C), estos son, (20, 15) y (50, -36). Como la relación es lineal, entonces la pendiente de la recta que une estos puntos es

$$m = \frac{cambio\ variable\ dependiente}{cambio\ veriable\ independiente} = \frac{C_2 - C_1}{p_2 - p_1} = \frac{-36 - 15}{50 - 20} = -\frac{51}{30} = -1.7$$

y la ecuación es

$$C - 15 = -1.7(p - 20)$$
$$C = -1.7p + 49$$

$$o \qquad C(p) = -1.7p + 49 \qquad (8)$$

b. La razón de cambio del punto de congelación con respecto al porcentaje de etilenglicol en la solución anticongelante es -1.7 grados por porcentaje de etilenglicol. Aumentar la cantidad de etilenglicol en 1% reducirá el punto de congelación en 1.7ºF.

c. Si C = -10ºF, entonces al sustituir en la ecuación (8) obtenemos

$$-10 = -1.7p + 49$$

$$1.7p = 59$$

$$p = \frac{59}{1.7} = 34.7\%$$

Ejercicio de práctica 3: Consulta la Tabla 1.

a. Supón que la concentración y el punto de congelación del propilenglicol están linealmente relacionados. Construye un modelo lineal para el punto de congelación.

b. Interpreta la pendiente en la parte a.

c. ¿Qué porcentaje (hasta un lugar decimal) de propilenglicol resultará en un punto de congelación de -15°F?

Ejemplo 4: En la superficie del mar, la presión del agua es la misma que la presión del aire por arriba del agua, 15 libras por pulgadas cuadradas (lb/pulg^2). Debajo de la superficie, la presión del agua aumenta 4.34 lb/pulg^2 por cada 10 pies que se desciende.

a. Determine una ecuación para la ***relación lineal*** entre presión y profundidad debajo del nivel del mar.

b. Interpreta la pendiente.

c. Interpreta el intercepto en el eje vertical.

Solución:

a. Comenzamos identificando las variables apropiadas:

Sea

P = presión del agua (variable dependiente)

d = profundidad debajo del nivel del mar (variable independiente)

Necesitamos definir dos puntos de la forma (d, P). Sabemos que la presión a nivel del mar es de 15 lb/pulg^2, esto es, (0, 15). Como la presión del agua aumenta 4.34 lb/pulg^2

por cada 10 pies, entonces (10, 19.34) es el otro punto que necesitamos. La pendiente de la recta que une estos puntos es

$$m = \frac{cambio\ variable\ dependiente}{cambio\ veriable\ independiente} = \frac{P_2 - P_1}{d_2 - d_1} = \frac{19.34 - 15}{10 - 0} = \frac{4.34}{10} = 0.434$$

y la ecuación es

$$P - 15 = 0.434(d - 0)$$
$$P = 0.434d + 15$$
$$o \quad P(d) = 0.434d + 15$$

b. La razón de cambio de la presión del agua con respecto a la profundidad debajo del nivel del mar es 0.434 lb/pulg^2 por pie. Aumentar un pie la profundidad debajo del nivel del mar aumenta la presión del agua 0.434 lb/pulg^2.

c. Recordemos que el intercepto en el eje vertical (el llamado intercepto en y) en el modelo lineal $y = mx + b$ es el valor de b. Por tal razón, en $P = 0.434d + 15$ el intercepto en el eje vertical es 15 lb/pulg^2 y representa la presión del agua en la superficie del mar.

Ejercicio de práctica 4: A medida que el aire seco asciende, se expande y se enfría. La temperatura del suelo es de 20ºC y la temperatura a una altura de 1 km es de 10ºC. Suponiendo que estas dos variables se relacionan linealmente:

a. Determine la ecuación para la relación entre la temperatura del aire y la altura.

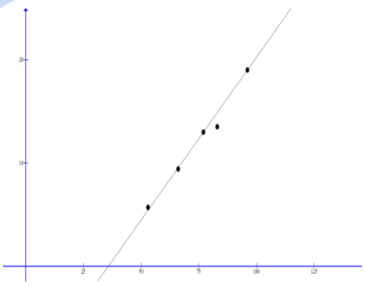
b. Interprete la pendiente.

c. ¿Cuál es temperatura del aire a una altura de 3 km?

Nota: Cuando un científico usa el *modelo lineal* para describir la relación entre la variable dependiente y la variable independiente, comúnmente, no afirma que la verdadera relación es lineal, sino más bien que una función lineal es una buena aproximación a los datos experimentales en el rango de interés. Veamos el siguiente ejemplo:

El número de huevos puestos por un pescado depende del tamaño de los peces: Para cualquiera de las especies, mientras más grande el pez, mayor es el número de huevos que pone. La Figura 2 muestra la gráfica de los datos del salmón, el número de huevos en miles versus la longitud del pescado en centímetros. Los datos experimentales están representados por los puntos. Notemos que los puntos experimentales están aproximadamente alineados, y la línea recta que mejor se ajusta a éstos se ha dibujado en la figura. Por tal razón, decimos que el número de huevos es una función lineal de la longitud del salmón, aunque los puntos experimentales no radican precisamente en línea recta.

Figura 2



RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. a. Variable dependiente – ancho del río (a)

   Variable independiente – distancia a la fuente: punto donde comenzó el viaje (d)

   b. $a = f(d)$

   c. El ancho del río cambia con respecto a la distancia a la fuente.

2. a. $S(t) = 0.75t + 717$

   b. Un aumento de 1ºF en la temperatura produce un aumento de 0.75 mph en la velocidad del sonido.

   c. $S(85) = 780.75$ mph

3. a. $C(p) = -1.5p + 47$

b. Aumentar 1% en la cantidad de propilenglicol seducirá el punto de congelación 1.5ºF.

c. 41.33%

4. a. $T(a) = -10a + 20$

   b. Por cada kilómetro que el aire seco asciende se enfría 10ºC.

   c. $T(3) = -10℃$

Ejercicios de práctica para la sección 1.2

1. Los guardabosques estiman la altura (*H*) de un albor midiendo el diámetro a la altura del pecho (*d*) (DBH, por sus siglas en inglés, *diameter at breast height*). Para el abeto blanco (Abeto blanco es una especie arbórea de la familia de las pináceas, originaria de las regiones montañosas de Europa) encontramos que cuando *d* = 5 pulgadas, *H* = 44.4 pies, mientras cuando *d* = 10 pulgadas, *H* = 64.7 pies.
   a. Determina el modelo matemático que relaciona la altura del albor con el diámetro al pecho (DBH).
   b. Interpreta la pendiente.
   c. Determina la altura de un abeto blanco con un diámetro al pecho (DBH) es de 15 pulgadas?
2. Un guardabosque encontró que para el abeto negro cuando *d* = 5 pulgadas, *H* = 44.45 pies, mientras cuando *d* = 10 pulgadas, *H* = 55.8 pies.
   a. Determina el modelo matemático que relaciona la altura del albor con el diámetro al pecho (DBH).
   b. Interpreta la pendiente.
   c. Determina la altura de un abeto blanco con un diámetro al pecho (DBH) es de 15 pulgadas?
3. Evelyn tiene una dieta estricta que sólo le permite comer en el desayuno hojuelas de maíz (cornflakes), leche y huevo hervido. Luego de consumir el huevo, su dieta le permite 300 calorías más de comida. Una onza de leche contiene 20 calorías y una onza de hojuelas de maíz 90 calorías.
   a. Determina la relación lineal entre la cantidad las onzas de leche y hojuelas de maíz que debe consumir Evelyn para mantener la dieta.
   b. Interpreta la pendiente.

   c. Si Evelyn consume 9 onzas de leche, ¿cuántas onzas de hojuelas de maíz debe consumir?

4. El Dr. J. D. Robinson publicó un modelo lineal para estimar el peso de una mujer (P) en libras a partir la estatura sobre los 5 pies (e) en pulgadas. El modelo del Dr. Robinson estima que para una estatura de 5’1” el peso es 111.7 libras y para una estatura de 5’5” el peso es 126.5 libras.
   a. Determina el modelo del Dr. Robinson.
   b. Interpreta la pendiente.
   c. Determina el peso de una mujer que mide 5’8”.
   d. Si una mujer pesa 150 libras, ¿Cuál será la estatura correspondiente que predice el modelo?
5. El Dr. Miller, también publicó un modelo lineal para estimar el peso de una mujer (P) en libras a partir la estatura sobre los 5 pies (e) en pulgadas. El modelo del Dr. Miller estima que para una estatura de 5’1” el peso es 120 libras y para una estatura de 5’4” el peso es 129 libras.
   a. Determina el modelo del Dr. Miller.
   b. Interpreta la pendiente.
   c. Determina el peso de una mujer que mide 5’8”.
   d. Si una mujer pesa 144 libras, ¿Cuál será la estatura correspondiente que predice el modelo del Dr. Miller?
6. El Dr. J. D. Robinson también publicó un modelo lineal para estimar el peso de un hombre (P) en libras a partir de la estatura sobre los 5 pies (e) en pulgadas. El modelo del Dr. Robinson estima que para una estatura de 5’1” el peso es 119.2 libras y para una estatura de 5’5” el peso es 136 libras.
   a. Determina el modelo del Dr. Robinson.
   b. Interpreta la pendiente.
   c. Determina el peso de un hombre que mide 6’2”.
   d. Si un hombre pesa 157 libras, ¿Cuál será la estatura correspondiente que predice el modelo?
7. El Dr. D. R. Miller desarrolló un modelo lineal para estimar el peso de un hombre (P) en libras a partir la estatura sobre los 5 pies (e). El modelo del Dr. Miller estima que para una estatura de 5’1” el peso es 127.1 libras y para una estatura de 5’4” el peso es 136.4 libras.
   a. Determina el modelo del Dr. Miller.
   b. Interpreta la pendiente.
   c. Determina el peso de un hombre que mide 6’2”.
   d. Si un hombre pesa 160 libras, ¿Cuál será la estatura correspondiente que predice el modelo?

8. En aire estable, la temperatura del aire desciende casi 5ºF por cada 1,000 pies que se ganen en altura.
   a. Si la temperatura al nivel del mar es 70ºF y un piloto comercial informa una temperatura de -20ºF a 18,000 pies de altura, determina el modelo lineal que relaciona la temperatura T con la altura a.
   b. Interpreta la pendiente del modelo.
   c. ¿A qué altura se encuentra la nave si la temperatura es 5ºF?

Respuestas a los ejercicios de práctica, sección 1.1

1. $m = 3$
2. $m = 1$
3. $m = -5$
4. $m = -\frac{2}{5}$
5. $m = -\frac{21}{22}$
6. $y = 3x + 11$
7. $y = -3x - 1$
8. $y = 5x + 22$
9. $y = -\frac{7}{5}x + \frac{11}{5}$
10. $y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{2}$
11. $y = -2x + 3$
12. $y = 3x - 2$
13. $m = -\frac{3}{5}; b = 3$
14. $m = -\frac{1}{2}; b = \frac{13}{4}$
15. $m = -2; b = -6$
16. $m = -\frac{3}{2}; b = 15$
17. a. Por cada kilómetro que el aire asciende la temperatura disminuye 9ºC.
    b.

a	0	1	2	3	4	5
T	25	16	7	-2	-11	-20

    c. A medida que la altura aumenta 1 kilómetro la temperatura disminuye 9ºC.

18. a. Por cada pie de aumento en la altura el punto de ebullición del agua disminuye 0.0018ºF.
    b.

A	0	5000	10000	15000	20000	25000	30000

E	212	203	194	185	176	167	158

c. El punto de ebullición del agua disminuye 9

19. a. $m = 8.34$
    b. Aumenta la dosis de un niño 8.34 mg por cada año de aumento en la edad.
    c. 50.04 mg.

20. a. Por cada año, a partir de 1900, la temperatura de la superficie del planeta aumenta 0.02ºC.
    b. La temperatura de la superficie del planeta en 1900.
    c. 30.5ºC

Respuestas a los ejercicios de práctica, sección 1.2

1. a. $H(d) = 4.06d + 24.1$
   b. Por cada pulgada que aumente el DBH, la altura aumenta 4.06 pies.
   c. $H(15) = 85\ pies$
2. a. $H(d) = 2.27d + 33.1$
   b. Por cada pulgada que aumente el DBH, la altura aumenta 2.27 pies.
   c. $H(15) = 67.15\ pies$
3. a. $H(l) = -\frac{2}{9}l + \frac{10}{3} \quad 0 \leq l \leq 15$
   b. Por cada 9 onzas de leche que se aumente en la dieta de Evelyn, hay que disminuir 2 onzas de hojuelas de maíz.
   c. $\frac{5}{3}\ onzas$
4. a. $P(e) = 3.7e + 108$
   b. Por cada pulgada sobre los 5' de estatura el peso de la mujer aumenta 3.7 libras.
   c. 5'11.4"
5. a. $P(e) = 3e + 117$
   b. Por cada pulgada sobre los 5' de estatura el peso de la mujer aumenta 3 libras.
   c. 5'9"
6. a. $P(e) = 4.2e + 115$
   b. Por cada pulgada sobre los 5' de estatura el peso del hombre aumenta 4.2 libras.
   c. 5'10"
7. a. $P(e) = 3.1e + 124$
   b. Por cada pulgada sobre los 5' de estatura el peso del hombre aumenta 3.1 libras.
   c. 5'11.6"
8. a. $T(a) = -0.005a + 70$
   b. Por cada pie aumente la altura la temperatura del aire disminuye 0.005ºF.
   c. 13,000 pies