

## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES GUÍA DEL MAESTRO

**Autor:** Dr. Edwin Morera González

**Materia:** Matemáticas **Nivel:** 7-9.

**Concepto Principal:** Resolución de problemas verbales

**Conceptos Secundarios:** Ecuaciones lineales en una variable, ecuaciones lineales en dos variables y traducción de expresiones verbales a algebraicas.

**Conocimiento previo:** Resolver ecuaciones lineales en una variable, determinar una solución de una ecuación lineal en dos variables, pendiente, gráfica del conjunto solución de una ecuación lineal en dos variables, determinar la ecuación de una línea dado dos puntos.

### Objetivos específicos:

Al finalizar la actividad los participantes:

1. Resolverán problemas de:
  - a. Números.
  - b. Figuras geométricas.
  - c. Mezclas.
  - d. Trabajo.
2. Utilizarán la calculadora gráfica como herramienta útil en la solución de problemas.

### Estándares, Expectativas e Indicadores por Grado:

#### ESTÁNDAR DE CONTENIDO 1: NUMERACIÓN Y OPERACIÓN

El estudiante es capaz de entender los procesos y conceptos matemáticos al representar, estimar, realizar cálculos, relacionar números y sistemas numéricos.

#### Séptimo

#### 1.0 Comprende el significado de los números racionales, sus operaciones y los expresa en múltiples formas

**N.SN.7.1.1** Reconoce que todo número racional es un decimal periódico infinito y convierte decimales finitos a fracciones.

**N.SN.7.1.2** Interpreta potencias positivas enteras como multiplicación repetida y potencias enteras negativas como división repetida o multiplicación como inverso multiplicativo.

**N.SN.7.1.3** Expresa exponentes enteros negativos como fracción.

- N.SN.7.1.4** Determina (sin calculadora) entre qué dos enteros se encuentra la raíz de un entero que no es un cuadrado perfecto y explica por qué.
- N.SN.7.1.5** Reconoce, relaciona y aplica las propiedades de los números racionales (asociativa, conmutativa, identidad, inverso, distributiva, clausura) para resolver problemas.
- N.SN.7.1.6** Lee, escribe y compara números racionales en notación científica utilizando potencias de 10 con exponentes enteros (positivos y negativos) e interpreta las aplicaciones de la notación científica en contextos variados incluyendo formatos en instrumentos tecnológicos.

## **2.0 Modela las operaciones, realiza cálculos con fluidez y resuelve problemas con números enteros**

- N.SO.7.2.1** Modela la suma, resta, multiplicación y división con números enteros, describe las relaciones entre estas operaciones y aplica el orden de operaciones.
- N.OE.7.2.2** Realiza cálculos con fluidez con los números enteros, incluyendo las raíces de cuadrados perfectos y cubos perfectos.
- N.OE.7.2.3** Representa y soluciona problemas matemáticos y de la vida real que involucre los números enteros.
- N.OE.7.2.4** Estima y juzga la razonabilidad de los resultados que involucren las operaciones con enteros.

## **3.0 Realiza cálculos con fluidez con números racionales expresados en forma decimal y fraccionaria y resuelve problemas**

- N.OE.7.3.1** Realiza cálculos con fluidez con los números racionales (enteros, fracciones y decimales positivos y negativos) y aplica el orden de operaciones.  
o Descubre y aplica las relaciones caracterizadas por  
$$a - b = a + (-b); a \div b = a \times \frac{1}{b}$$

- N.OE.7.3.2** Representa y soluciona problemas matemáticos y de la vida real que involucre los números racionales.
- N.OE.7.3.3** Estima y juzga la razonabilidad de los resultados que involucren las operaciones con números racionales.
- N.OE.7.3.4** Simplifica potencias con bases racionales y exponentes enteros.
- N.OE.7.3.5** Relaciona una potencia y la extracción de la raíz de un cuadrado perfecto. Identifica, calcula y utiliza la raíz de cuadrados perfectos, cubos perfectos.

## **4.0 Resuelve problemas relacionados con razones, proporciones y porcentajes.**

- N.SN.7.4.1** Identifica una o más razones que representen una comparación dada y expresa las razones usando distintas notaciones ( $ba$ ;  $a \underline{a} b$ ;  $a \underline{\cdot} b$ ).
- N.SN.7.4.2** Interpreta y utiliza razones en diferentes contextos para mostrar las relaciones de dos cantidades usando la notación apropiada ( $a/b$ ,  $a:b$ ).
- N.SN.7.4.3** Describe una proporción como dos razones equivalentes, escribe y resuelve una proporción al solucionar problemas que se relacionen con factores de conversión de escalas y medidas, por cientos y probabilidades.
- N.OE.7.4.4** Representa, estima y resuelve problemas que involucren razones, proporciones o porcentajes (incluyendo porcentajes menores que 1 y mayores que 100).



## Octavo

### 1.0 Describe los números reales como el conjunto de todos los números decimales y utiliza la notación científica, la estimación y las propiedades de las operaciones para representar y resolver problemas que involucren números reales.

**N.SN.8.1.1** Describe los números reales como el conjunto de todos los posibles números decimales.

**N.SN.8.1.2** Reconoce que representaciones como  $\pi$ , 2 y otros números irracionales son decimales infinitos, no-periódicos.

**N.SN.8.1.4** Reconoce, relaciona y aplica las propiedades de los números reales (asociativa, conmutativa, identidad, inverso, distributiva, clausura) para resolver problemas.

**N.SN.8.1.5** Distingue entre números racionales e irracionales.

**N.SN.8.1.6** Utiliza las leyes de exponentes para simplificar expresiones.

**N.SN.8.1.7** Utiliza técnicas de estimación para decidir si la respuesta es razonable.

### Trasfondo:

*“Quien quiere hacer algo encuentra un medio; quien no quiere hacer nada encuentra una excusa”. (Proverbio chino)*

*“La matemática ha constituido, tradicionalmente, la tortura de los escolares del mundo entero, y la humanidad ha tolerado esta tortura para sus hijos como un sufrimiento inevitable para adquirir un conocimiento necesario; pero la enseñanza no debe ser una tortura, y no seríamos buenos profesores si no procuráramos, por todos los medios, transformar este sufrimiento en goce, lo cual no significa ausencia de esfuerzo, sino, por el contrario, alumbramiento de estímulos y de esfuerzos deseados y eficaces”. (Puig Adam, 1958)*

La matemática es la única asignatura que se estudia en todos los países del mundo y en todos los niveles educativos. Supone un pilar básico de la enseñanza en todos ellos. La causa fundamental de esa presencia universal hay que buscarla en que las matemáticas constituyen un idioma *“poderoso, conciso y sin ambigüedades”* (Cockroft, 1985). Otros pensamos que *la matemática es necesaria para entender el mundo que nos tocó vivir*. Ese idioma se pretende que sea aprendido por nuestros alumnos, hasta conseguir que lo “hablen”. En general por medio de la contemplación de cómo los hacen otros (sus profesores), y por su aplicación a situaciones muy sencillas y ajenas a sus vivencias (los ejercicios).

La utilización de un idioma requiere de unos conocimientos mínimos para poder desarrollarse, por supuesto. Pero sobre todo se necesitan situaciones que inviten a comunicarse por medio de ese idioma, a esforzarse en lograrlo, y, desde luego, de unas técnicas para hacerlo. En el caso del idioma matemático, una de las técnicas fundamentales de comunicación son los métodos de Resolución de Problemas.

La resolución de problemas es considerada en la actualidad la parte más esencial de la educación matemática. Mediante la resolución de problemas, los estudiantes experimentan la potencia y utilidad de las Matemáticas en el mundo que les rodea. El N.C.T.M. declaró hace

más de diez años que “*el objetivo fundamental de la enseñanza de las Matemáticas no debería ser otro que el de la resolución de problemas*”.

### Glosario:

**Problema:** es una situación que se desea resolver, pero por el momento no es posible hacerlo. En el caso de un problema matemático, la situación usualmente requiere técnicas matemáticas para su solución.

**Problema verbal:** Problema que se plantea en palabras.

**Ecuación algebraica:** es un enunciado matemático de que dos expresiones algebraicas son iguales.

**Dominio para una variable:** se define como el conjunto de números que pueden remplazar a la variable. Excepto que se indique lo contrario, se supone que el dominio para una variable en una ecuación o expresión algebraica es el conjunto de aquellos números reales para los cuales las expresiones algebraicas con la variable son números reales.

**Conjunto solución:** se define como el conjunto de todos los elementos en el dominio de la variable que hacen que la proposición que resulta al sustituir el valor sea cierta. Cada elemento del conjunto solución se denomina una **solución**, o **raíz** de la ecuación.

**Resolver una ecuación:** es determinar el conjunto solución para la ecuación.

**Ecuación lineal en una variable:** es una ecuación de la forma  $Ax + B = C$ , donde A, B y C son números reales con A distinto a cero.

**Ecuación lineal en dos variables:** es una ecuación de la forma  $Ax + By = C$ , donde A, B y C son números reales con A y B distintos a cero a la vez.

### Materiales y equipo:

1. papelotes
2. marcadores
3. cinta adhesiva
4. calculadoras gráficas *TI-84 Plus*
5. computadora
6. proyector digital (*Infocus*)

### Proceso Educativo:

- I. Pre y Pos prueba
  1. Se evaluará el conocimiento de los participantes antes de la capacitación con la Preprueba y el conocimiento después con la Posprueba (documentos adjuntos).
- II. Assessment Continuo
  1. Obviamente la preprueba y la posprueba son parte del assessment de la capacitación. Es la primera ayuda al capacitador para tomar decisiones acerca del conocimiento que tiene el participante del tema y de las próximas actividades que llevará a cabo. Mientras la posprueba ayuda al capacitador a tomar decisiones de la necesidad de re enseñanza en próximas capacitaciones.

2. Las hojas de trabajo, el capacitador las utilizará como assessment. Los participantes estarán cotejando su aprendizaje en la medida que se discutan las mismas en grupo grande. Además, el capacitador las corrige y las utilizarlas para tomar decisiones.
3. Durante todas las actividades el capacitador estará haciendo observaciones mientras se mueve entre las parejas, cuando los participantes discuten con su pareja y cuando presentan sus respuestas a las preguntas. Esto le permite hacer conclusiones del aprendizaje de éstos y los próximos pasos a seguir.

I. **Inicio:** *Explorando concepciones previas*

1. Esta actividad está diseñada para explorar el conocimiento previo de los participantes con relación a la resolución de problemas que involucran números, figuras geométricas, mezclas y trabajo.
  - i. Se dividen los maestros en grupos y se entrega la **Hoja de Trabajo 1** (HT1). (Las contestaciones están en el documento titulado *Hoja de Trabajo 1: Soluciones*)
  - ii. Se le pide que contesten las preguntas de la HT1 individualmente. Luego discuten sus contestaciones con el grupo y llegan a consenso.
  - iii. Cada grupo presenta sus contestaciones en grupo grande. El capacitador y los participantes no pasarán juicio de las contestaciones. El capacitador estará observando las contestaciones e identificará concepciones erróneas, si las hay, para luego a través de la capacitación hacer énfasis en las mismas y corregirlas. En el cierre de la segunda parte de la capacitación los participantes volverán a revisar la HT1 y harán los arreglos pertinentes. De esta forma tendrán la oportunidad de percatarse de los posibles errores y corregirlos, mientras el capacitador tendrá un assessment final.

II. **Desarrollo**

**Actividad 1: Problemas de números**

1. El capacitador presenta el siguiente problema y pide a los participantes que lo lean con detenimiento: **La suma de tres números es 67. El segundo número es cinco menos que el doble del primero y el tercero es el triple del primero. Determine la diferencia entre el mayor y el menor de los números.**
2. El capacitador pregunta:
  - i. ¿Cuáles son los desconocidos? Contestación: Los tres números.
  - ii. ¿Qué información nos ofrecen sobre los desconocidos? Contestación: La suma es 67, el segundo número es cinco menos que el primero y el tercer número es el triple del primero.
  - iii. ¿Cómo podemos identificar los desconocidos? Contestación: Sea  $n$  el primer número,  $2n - 5$  el segundo número y  $3n$  el tercer número.
  - iv. ¿Cuál ecuación podemos establecer con los desconocidos? Contestación:  $n + 2n - 5 + 3n = 67$ .
  - v. ¿Cuál es la solución de la ecuación? Contestación:  $n = 12$
  - vi. ¿Cuáles son los números que estamos buscando? Contestación: El primer número es 12, el segundo número es 19 y el tercer número es 36.

- vii. ¿Cuál es la solución del problema? Contestación: La diferencia entre el número mayor y el menor es  $36 - 12 = 24$ .
- viii. ¿Cómo podemos verificar que resolvimos correctamente el problema? Contestación: Verificando que se cumplen las afirmaciones del problema, esto es, ¿la suma de los números es 67?,  $12 + 19 + 36 = 67$ , sí; ¿el segundo número es cinco menos que el doble del primero?,  $2(12) - 5 = 19$ , sí; ¿el tercer número es el triple del primero?,  $3(12) = 36$ , sí.
3. El capacitador hace transparente que para resolver el problema utilizamos el método LSTRV.
4. El capacitador reparte la Hoja de Trabajo 2 (HT2) y discute con los participantes las instrucciones. Mientras los grupos resuelven los problemas el capacitador contesta preguntas y se asegura que los grupos trabajen colaborativamente. (Las contestaciones se encuentran en el documento Hoja de Trabajo 2: Soluciones)
5. El capacitador discute en grupo grande los problemas.

### **Actividad 2: Problemas de figuras geométricas**

1. El capacitador presenta el siguiente problema y pide a los participantes que lo lean con detenimiento: ***El ancho de un rectángulo es 5 pies menor que el largo. Si el perímetro del rectángulo es 90 pies, determine el área del rectángulo.***
2. El capacitador pregunta:
  - i. ¿Cuáles son los desconocidos? Contestación: Las dimensiones del rectángulo, el largo y el ancho.
  - ii. ¿Qué información nos ofrecen sobre los desconocidos? Contestación: El perímetro del rectángulo es 90 pies, esto es, el doble del ancho más el doble del largo es igual a 90 pies; el ancho es 5 pies menor que el largo del rectángulo.
  - iii. ¿Cómo podemos identificar los desconocidos? Contestación: Sea  $L$  el largo del rectángulo,  $L - 5$  el ancho del rectángulo.
  - iv. ¿Cuál ecuación podemos establecer con los desconocidos? Contestación:  $2L + 2(L - 5) = 90$ .
  - v. ¿Cuál es la solución de la ecuación? Contestación:  $L = 25$ .
  - vi. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo? Contestación: El largo mide 25 pies y el ancho 20 pies.
  - vii. ¿Cuál es la solución del problema? Contestación: El área del rectángulo es igual a  $(25 \text{ pies})(20 \text{ pies}) = 500 \text{ pies}^2$ .
  - viii. ¿Cómo podemos verificar que resolvimos correctamente el problema? Contestación: Verificando que se cumplen las afirmaciones del problema, esto es, ¿el perímetro del rectángulo es 90 pies?,  $2(25) + 2(20) = 90$ , sí; ¿el ancho del rectángulo es 5 pies menor que el largo?,  $25 - 5 = 20$ , sí.
3. El capacitador hace transparente que para resolver el problema utilizamos el método LSTRV.
4. El capacitador reparte la Hoja de Trabajo 3 (HT3) y discute con los participantes las instrucciones. Mientras los grupos resuelven los problemas el capacitador contesta preguntas y se asegura que los grupos trabajen colaborativamente. (Las contestaciones se encuentran en el documento Hoja de Trabajo 3: Soluciones)



5. El capacitador discute en grupo grande los problemas.

### **Actividad 3: Problemas de mezclas**

1. El capacitador presenta el siguiente problema y pide a los participantes que lo lean con detenimiento: **Luis mezcló una solución ácida al 50% con otra solución ácida al 20% y produjo 150 ml de una solución ácida al 40%. Determine las cantidades que mezcló para obtener la solución final.**
2. El capacitador anima a los participantes a completar la siguiente tabla a través de preguntas:

	<i>Solución al 50%</i>	<i>Solución al 20%</i>	<i>Solución final 40%</i>
<i>Cantidad de solución</i>	$x$	$150 - x$	150
<i>Cantidad de ingrediente activo</i>	$0.50x$	$0.20(150 - x)$	$0.40(150)=60$

- i. ¿Cuáles son los porcentajes de las soluciones? Contestación: 50%, 20% y 40% respectivamente.
  - ii. ¿Qué información nos ofrecen sobre las soluciones? Contestación: La suma de la solución al 50% y la solución al 20 será igual a 150 ml y la cantidad de solución al 40% es igual a 150 ml.
  - iii. ¿Cuáles son los desconocidos? Contestación: La cantidad de solución al 50% y la cantidad de solución al 20%.
  - iv. ¿Cómo podemos identificar los desconocidos? Contestación: Sea  $x$  la cantidad de solución al 50% y  $150 - x$  la cantidad de solución al 20%.
  - v. ¿Cuál ecuación podemos establecer con los desconocidos? Contestación:  $0.50x + 0.20(150 - x) = 60$ .
  - vi. ¿Cuál es la solución de la ecuación? Contestación:  $x = 100$ .
  - vii. ¿Cuál es la solución del problema? Contestación: Hay que mezclar 100 ml de la solución al 50% con 50 ml de la solución al 20% para producir 150 ml de la solución al 40%.
  - viii. ¿Cómo podemos verificar que resolvimos correctamente el problema? Contestación: Verificando que se cumplen las afirmaciones del problema, esto es, ¿la suma de las soluciones es 150 ml?,  $100 + 50 = 150$ , sí; ¿la cantidad de ácido en la primera solución más la cantidad de ácido en la segunda solución es igual a la cantidad de ácido en la solución final?, ácido en la primera solución, 50% de 100, es 50 ml, la cantidad de ácido en la segunda solución, 20% de 50, es 10 ml, la cantidad de ácido en la solución final, 40% de 150, es 60 ml,  $50 \text{ ml} + 10 \text{ ml} = 60 \text{ ml}$ , sí.
3. El capacitador hace transparente que para resolver el problema utilizamos el método LSTRV.

4. El capacitador reparte la Hoja de Trabajo 4 (HT4) y discute con los participantes las instrucciones. Mientras los grupos resuelven los problemas el capacitador contesta preguntas y se asegura que los grupos trabajen colaborativamente. (Las contestaciones se encuentran en el documento Hoja de Trabajo 4: Soluciones)
5. El capacitador discute en grupo grande los problemas.

#### Actividad 4: Problemas de trabajo

1. El capacitador presenta el siguiente problema y pide a los participantes que lo lean con detenimiento: **Edwin e Iván fueron contratados para pintar una casa. Edwin, trabajando solo, podría pintar la casa en 5 días mientras que Iván la podría pintar en 4 días. Si trabajan ambos, determine en cuántos días pintarán la casa.**
2. El capacitador pregunta:
  - i. ¿Cuál es la desconocida? Contestación: La cantidad de días que se tardarán en pintar la casa trabajando juntos.
  - ii. ¿Qué información nos ofrecen sobre la desconocida? Contestación: La parte del trabajo que hace Edwin en un día más la parte del trabajo que hace Iván en un día es igual a la parte del trabajo que hacen juntos en un día.
  - iii. ¿Cómo podemos identificar la desconocida? Contestación: Sea  $t$  la cantidad de días que se tardan juntos en pintar la casa.
  - iv. ¿Cuál ecuación podemos establecer con los desconocidos? Contestación:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{1}{t}.$$

- v. ¿Cuál es la solución de la ecuación? Contestación:  $t = \frac{20}{9} = 2\frac{2}{9}$ .
- vi. ¿Cuánto días tardan juntos? Contestación: Se tardan  $2\frac{2}{9}$  días en pintar la casa.
- vii. ¿Cómo podemos verificar que resolvimos correctamente el problema? Contestación: Verificando que se cumplen las afirmaciones del problema, esto es, ¿el trabajo que hace Edwin en un día más el trabajo que hace Iván en un día es igual al trabajo que hacen juntos en un día?, el trabajo que hace Edwin en un día es  $\frac{1}{5}$ , el trabajo que hace Iván en un día es  $\frac{1}{4}$ , el trabajo que hacen juntos en un día es  $\frac{1}{2\frac{2}{9}} = \frac{1}{\frac{20}{9}} = \frac{9}{20}$ ,  $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}$ , sí.

3. El capacitador hace transparente que para resolver el problema utilizamos el método LSTRV.
4. El capacitador reparte la Hoja de Trabajo 5 (HT5) y discute con los participantes las instrucciones. Mientras los grupos resuelven los problemas el capacitador contesta preguntas y se asegura que los grupos trabajen colaborativamente. (Las contestaciones se encuentran en el documento Hoja de Trabajo 5: Soluciones)
5. El capacitador discute en grupo grande los problemas.



## II. Cierre

1. Retomar la Hoja de trabajo 1 del inicio de la tercera parte para reflexionar acerca de los aprendizajes en la capacitación (*assessment* final). Se le permite a los participantes que vuelvan a la HT5 y hagan los cambios que sean pertinentes. Se discute con los participantes los cambios propuestos y la razón por qué los hicieron.

## Bibliografía:

Bello, Ignacio (2009). *Matemáticas Básicas Universitarias*. McGraw-Hill, México.

Bennett, Jeffrey y Briggs, William (2011). *Using & Understanding Mathematics: A Quantitative Reasoning Approach 5<sup>th</sup> edition*. Addison-Wesley, Boston.

Departamento de Educación (2011). *Estándares de Contenido y Expectativas de Grado: Programa de Matemáticas*.