

**Título:** Relaciones, funciones y algo más...

**Autor:** Prof. Ermer Díaz

**Nivel:** 7- 9

**Conceptos principales:**

Relaciones. Variable independiente y dependiente, función, dominio, campo de valores, gráfica, modelos matemáticos.

**Objetivo:** Al finalizar la actividad el estudiante podrá explorar e investigar diferentes modelos matemáticos que describen eventos reales.

**Objetivos Específicos:**

**Durante la actividad, el estudiante:**

1. Identificar la variable independiente y dependiente de una relación.
2. Determinar si una relación es función.
3. Identificar el dominio y campo de valores de una función.
4. Trazar la gráfica de un modelo matemático de un evento real.
5. Utilizar modelos matemáticos para hacer predicciones.

**Estándares:**

## **ESTÁNDAR DE CONTENIDO 2: ALGEBRA**

**El estudiante es capaz de realizar y representar operaciones numéricas que incluyen relaciones de cantidad, funciones, análisis de cambios, empleando números, letras (variables) y signos.**

**6.0 Interpreta la razón de cambio en situaciones matemáticas y del mundo real y reconoce la razón de cambio constante asociada a relaciones lineales.**

**A.CA.7.6.1** Demuestra que la razón de cambio en casos lineales es constante y describe gráficamente la relación proporcional implícita en esta razón de cambios y representada en la inclinación de la línea.

**A.CA.7.6.2** Interpreta, describe y utiliza la razón de cambio para modelar situaciones matemáticas y del mundo real.

Interpreta el significado de la razón de cambio asociada con incrementos y decrecimientos en contextos variados y del mundo real que involucran tasas, razones y porcentajes.

**A.PR.7.6.3** Construye gráficas de relaciones lineales observando que el cambio vertical por unidad dividido por el cambio horizontal por unidad es igual a la pendiente de la gráfica.

**A.PR.7.6.4** Establece conexiones y traduce entre representaciones equivalentes de relaciones lineales, incluyendo gráficas, tablas, ecuaciones y expresiones verbales para resolver problemas.

**2.0 Identifica funciones basándose en el comportamiento de su gráfica y su razón de cambio, y describe funciones usando la notación y terminología apropiada.**

**A.PR.8.2.1** Determina si una relación es una función a partir de su gráfica y su descripción verbal.

**A.PR.8.2.2** Determina si una relación es lineal o no lineal basándose en si tiene o no razón de cambio constante, su descripción verbal, su tabla de valores, su representación gráfica o su forma simbólica.

**A.RE.8.2.3** Describe las características de funciones lineales por pedazos, incluyendo valor absoluto y situaciones donde surjan.

**A.RE.8.2.4** Aplica la terminología y los símbolos asociados con expresiones, funciones y ecuaciones lineales, incluyendo notación de funciones, entradas, salidas, dominio, alcance, pendiente, interceptos, variable dependiente e independiente.

**6.0 Identifica ciertas relaciones no lineales y las clasifica en relaciones exponenciales o relaciones cuadráticas, incluyendo relaciones de la forma  $xky=$  basándose en la razón de cambio en tablas, formas simbólicas o representaciones gráficas.**

**A.RE.8.6.1** Identifica relaciones no lineales (exponencial, cuadráticas, y de la forma  $xky=$  en representaciones gráficas o tablas a través del examen de las diferencias sucesivas, las razones, las formas simbólicas o las propiedades de la gráfica.

**8.0 Utiliza la función lineal para interpretar, modelar y resolver situaciones que exhiben razón de cambio constante.**

**A.CA.8.8.1** Generaliza patrones lineales o sucesiones aritméticas utilizando reglas verbales y expresiones simbólicas tales como  $ak$  y  $ax + b$

**A.CA.8.8.2** Analiza situaciones matemáticas y del mundo real, determina si puede



describirse por un modelo lineal, y determina la razón de cambio constante y desarrolla e interpreta la función lineal que modela la situación.

#### **ESTÁNDAR DE CONTENIDO 4: MEDICIÓN**

**El estudiante es capaz de utilizar sistemas, herramientas y técnicas de medición para establecer conexiones entre conceptos espaciales y numéricos.**

**15.0 Aplica los conceptos de perímetro, área de superficie y volumen para medir figuras.**

**M.TM.7.15.1** Investiga, establece conjeturas y aplica las fórmulas para determinar perímetro, área de figuras bidimensionales básicas (rectángulos, paralelogramos, trapecios, trapezoides, triángulos) y el área de superficie y el volumen de figuras tridimensionales (prismas, pirámides y cilindros).

#### **ESTÁNDAR DE CONTENIDO 5: ANÁLISIS DE DATOS Y PROBABILIDAD**

**El estudiante es capaz de utilizar diferentes métodos de recopilar, organizar, interpretar y presentar datos para hacer inferencias y conclusiones.**

**9.0 Determina el espacio muestral de un experimento, y emplea la regla de conteo de multiplicación. (Propiedad Fundamental de Conteo).**

**E.PR.9.9.1** Utiliza listas, tablas y diagramas de árbol para representar los resultados posibles en un espacio muestral para un experimento.

#### **Materiales:**

- |                             |                      |
|-----------------------------|----------------------|
| ✓ Dados (6 caras y 8 caras) | ✓ Palillos de Madera |
| ✓ Periódico                 | ✓ Papel blanco       |
| ✓ Liguillas                 | ✓ Tijeras            |
| ✓ Bolsitas plásticas        | ✓ Regla (mm)         |
| ✓ Presillas                 | ✓ Papel cuadriculado |
| ✓ Cinta métrica – metro     | ✓ Lápices de colores |
| ✓ Bolas de tenis            | ✓ Marcadores         |
| ✓ Plastilina                | ✓ Calculadora        |



## Introducción:

Galileo Galilei expresó en algún momento **“Las matemáticas es el lenguaje que Dios utilizó para describir el Universo”**. Esta afirmación nos lleva a pensar que los eventos naturales y físicos que ocurren alrededor de nosotros se pueden transcribir en algún modelo matemático. Durante esta actividad tendrás la oportunidad de experimentar con algunos eventos sencillos e intentarás hallar el modelo matemático que lo describe.

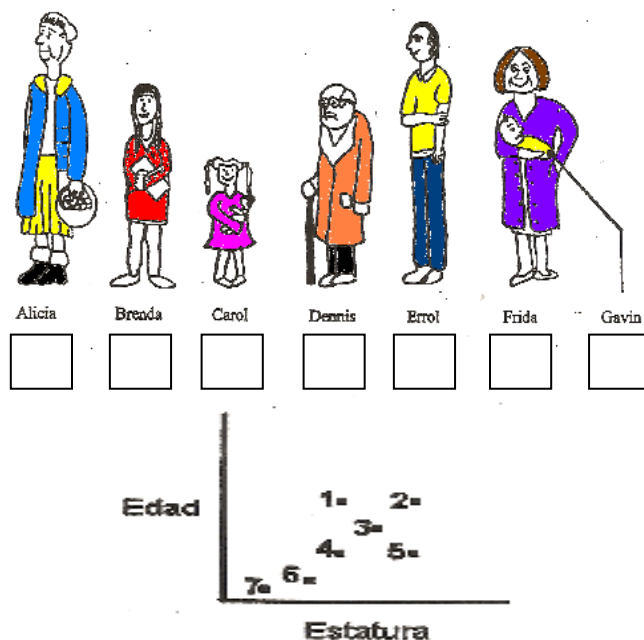
En esta actividad podrás analizar los tipos de relaciones e identificar cuál de ellas son funciones. Trabajarás recolectando datos e información para poder trazar la gráfica que represente el evento estudiado. También podrás usar la calculadora gráfica para estimar un modelo matemático que mejor describa los eventos estudiados y de esa manera poder hacer predicciones.

Te invito a que trabajes con dedicación. Sé un buen observador e investigador. Adelante, es momento para descubrir las **relaciones, funciones y algo más**.

## INICIO

*MAESTR@: Discuta con los estudiantes el ejercicio a continuación. Pregunte a los estudiantes como fue que contestaron el ejercicio. Destaque las diferentes metodologías que usaron los estudiantes. Cree un ambiente de confianza. Enfaticé la existencia de dos variables. Analice con los estudiantes cual de las dos variables es la independiente cual la dependiente. Evite utilizar (eje de x o eje de y). Enfaticé que cada eje está identificado. Discuta las preguntas con los estudiantes. Aclare las dudas. Exija el uso de vocabulario matemático.*

1. Parea cada número de la gráfica con cada personaje del diagrama.



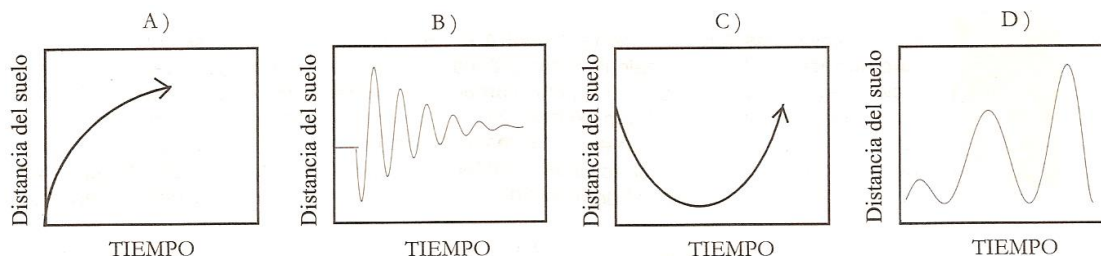
**Contesta:**

- ¿Cuál es la variable independiente? Varios
- ¿Cuál es la variable dependiente? Varios
- ¿Quiénes tienen la misma altura?
- ¿Quiénes tiene la misma edad?
- Explica como asignaste cada número a los personajes.

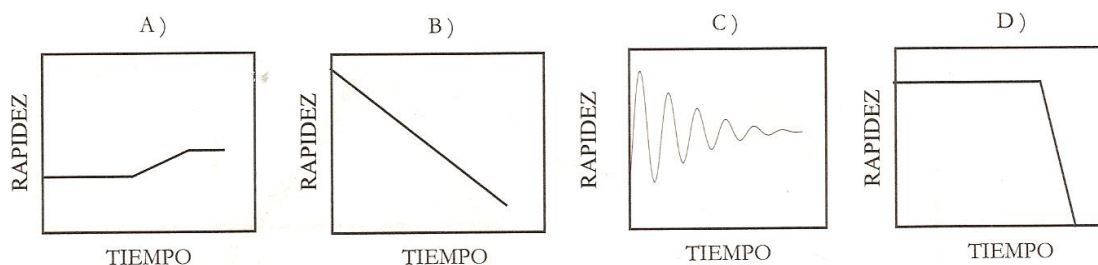
*Maestr@: Este ejercicio es muy interesante y puede ser de gran ayuda para aclarar la diferencia entre la grafica de los datos de un evento y el comportamiento físico del evento. Enfatiche que la variable independiente es el tiempo. Permita que el estudiante descubra la variable dependiente. Discuta las graficas que no cumplen con el evento. Permita que los estudiantes expliquen porque no pueden ser.*

2. Analiza los siguientes eventos. Selecciona la gráfica que mejor describe el evento. Escribe la letra en el espacio en blanco y justifica tu contestación.

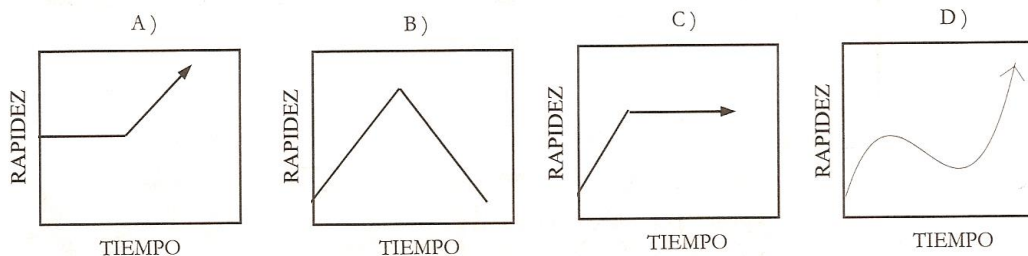
a) Un niño se mece en un columpio.     D    



b) Un carro público llega a la parada y deja los pasajeros.     D    

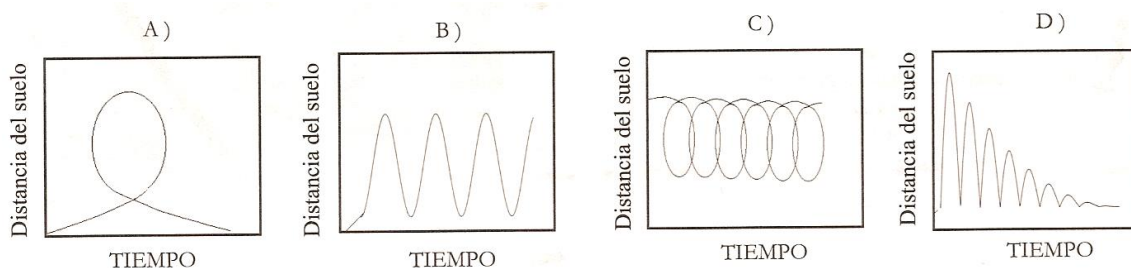


c) Un hombre sube la colina a paso uniforme y luego empieza a rodar hacia abajo.     A    



d) En un parque de diversiones una niña se pasea en la estrella.

  B  



**Contesta:**

- ¿Cuál es la variable independiente en cada una de las gráficas antes presentadas? **Tiempo**
- ¿Cuál es la variable dependiente en cada una de las gráficas presentadas? **Varias**
- ¿Cuál de los ejercicios presentados te causó mayor dificultad entenderlo? ¿Por qué? **Varios**

*Maestr@: Forme parejas para realizar esta actividad. Permita que los estudiantes presenten las relaciones encontradas. Enfaticé en la descripción de la variable dependiente e independiente con lujo de detalles. Ejemplo Precio de autos vs Precio de autos en el negocio Pepe auto el día 12 de octubre de 2010. Discuta con los estudiantes los cuatro tipos de relaciones entre dos conjuntos (Uno a Uno, Uno a Muchos, Muchos a uno y muchos a muchos). Tenga preparados varios ejemplos de cada uno en caso que los estudiantes no encuentren alguno de los casos. Discuta cuál de esas relaciones es función. Defina lo que es función*

**“Una función es una relación entre dos conjuntos. Un primer conjunto denominado dominio que contiene los valores independientes y un segundo conjunto denominado campo de valores que contiene los valores dependientes. Una relación es función si para cada valor del dominio le corresponde uno y solo un valor en el campo de valores”**

## Parte B

Únete a otro compañero. El maestr@ les entregará varias hojas de periódico.  
Busquen diferentes tipos de relaciones. Completa la **Hoja de trabajo #1**.

Utilicen los papelotes para presentar a tus compañeros los hallazgos de tu búsqueda.



Es importante que puedan identificar y definir claramente la variable independiente y dependiente. Clasifica cada relación como Uno a uno (1-1), uno a muchos ( 1-m) , muchos a uno ( m-1 ) o muchos a muchos (m-m). Éxito.



## Hoja de Trabajo #1

Relaciones (Periódico)



Descripción Variable Independiente	Descripción Variable Dependiente	Tipo de relación

*Maestr@: Permita que los estudiantes trabajen en parejas y puedan aclarar sus dudas entre ellos. Intervenga lo menos posible. Discuta con los estudiantes. Enfatice en la limitación del dominio y campo de valores. Mencione la diferencia entre los datos obtenidos y todas las posibilidades que cada evento tiene.*

El maestr@ les entregará 3 dados de 6 caras y dos de 8 caras. Utilicen estos dados para completar la **Hoja de trabajo #2**. Llena cada una de las tablas. Determina el dominio y campo de valores. Determina el tipo de relación y si esta es función.

## Desarrollo

*Maestr@: Esta sección es la más interesante. Motive al estudiante a realizar cada una de las actividades. El eje central de cada una de ellas es: Recolectar los datos – Llenar las tablas – construir la grafica – Analizar los resultados. Al finalizar cada estación el estudiante debe contestar las preguntas. Discuta cada una de las preguntas. Puede asignar a diferentes grupos para que presenten sus resultados y así puede discutirlos todos. Las actividades pretenden que el estudiante descubra que existen diferentes tipos de relaciones. Al final puede investigar si los estudiantes reconocen las relaciones (lineal, cuadrática, cúbica, exponencial-creciente, exponencial decreciente).*

## Hoja de Trabajo #2

### Relaciones y funciones (Dados)



#### Parte 1.

Para completar cada una de las tablas a continuación lanza los tres dados de seis caras. Determina el dominio y campo de valores. Clasifica la relación e indica si esta es función. De no ser función justifica tu respuesta.

V - El valor del dado menor	S - La suma de los tres dados

P - La suma del menor y el mayor	Q - El producto de los tres dados

**Dominio:**

**Dominio:**

**C. Valores:**

**C. Valores:**

**Relación:** \_\_\_\_\_

**Relación:** \_\_\_\_\_

**Función**

**Función**

☐ Si ☐ No

☐ Si ☐ No

#### Parte 2.

Para completar cada una de las tablas a continuación lanza los dos dados de seis caras y los dos dados de ocho caras. Determina el dominio y campo de valores. Clasifica la relación e indica si esta es función. De no ser función justifica tu respuesta.

R - El valor del dado mayor	T - La diferencia entre la suma de los dados de ocho caras y la suma de los dados de seis caras

K - El dado de mayor valor	L - La suma de todos los dados

**Dominio:**

**Dominio:**

**C. Valores:**

**C. Valores:**

**Relación:** \_\_\_\_\_

**Relación:** \_\_\_\_\_

**Función**

**Función**

☐ Si ☐ No

☐ Si ☐ No

**Parte 3.**

**Para completar cada una de las tablas a continuación lanza los tres dados de seis caras y los dos dados de ocho caras. Determina el dominio y campo de valores. Clasifica la relación e indica si esta es función. De no ser función justifica tu respuesta.**

E - El valor del dado menor	B – El dado mayor menos el dado menor

F – La diferencia entre el dado mayor y el dado menor	G – Cociente entre la suma de los dados cúbicos y octaedros.

**Dominio:**

**C. Valores:**

**Relación:** \_\_\_\_\_

**Función**

☐ Si   ☐ No

**Dominio:**

**C. Valores:**

**Relación:** \_\_\_\_\_

**Función**

☐ Si   ☐ No

Puedes trabajarlas siguientes actividades en pareja o tríos. Tendrás la oportunidad de realizar diferentes actividades para recolectar datos. Es importante que leas las instrucciones de cada estación para poder obtener datos precisos. Luego que realices cada actividad deberás construir una gráfica que represente los datos. Contesta las preguntas que aparecen en cada sección.

### **Estación #1: Ultimate Bungie**

#### **Materiales:**

Bolsitas ziplock

Canicas

Liguillas

Cinta métrica o metro

Clip (presilla)

#### **Procedimiento**

1. Inserta una presilla en la esquina de la bolsita ziplock.
2. Coloca inicialmente 3 liguillas conectadas a la presilla  
(Pregunta al maestr@ como hacerlo)
3. Mete de 5 a 10 canicas en la bolsita.
4. Con ayuda de tu compañero coloca la bolsita e la parte superior del metro y déjala caer.
5. Mide la distancia que recorre la bolsa con las canicas.
6. Apunta en la tabla que aparece en la **Hoja de trabajo #3**.
7. Añade una o dos liguillas y vuelve a lanzarla. Toma la medida de la distancia recorrida y apunta en la hoja de trabajo.
8. Construye la gráfica de puntos.

**Contesta:**

a) ¿Cómo quedaron los puntos en la gráfica?

---

b) ¿Cuántas liguillas necesitas para que la bolsita alcance la distancia máxima sin tocar el suelo? ¿Cómo lo determinaste?

---

---

c) Si colocas 20 liguilla, ¿qué distancia crees recorrerá la bolsita? ¿Cómo lo determinaste?

---

---

d) ¿Cuál es el dominio y campo de valores de este evento?

---

**Estación #2: Bounce, bounce...**

**Materiales:**

Una bola de tenis

Metro o cinta métrica

**Procedimiento**

1. Coloca la bola de tenis adyacente al metro en forma vertical.
2. Toma la altura inicial.
3. Deja caer la bola y mide la altura que obtuvo al rebotar.
4. Repite este procedimiento tres veces desde la misma altura inicial.
5. Promedia estas tres medidas.
6. Selecciona otra altura inicial y repite el procedimiento.
7. Anota los resultados en la **Hoja de trabajo #3**.
8. Taraza la gráfica de punto del evento.

**Contesta:**

a) ¿La bola rebotó igual cuando la lanzaste de la misma altura? Explica.

---

---

b) ¿Qué sucedió con el rebote a medida que aumentabas la altura inicial?

---

---

c) Describe la gráfica que describe este evento.

---

---

d) ¿Cuál será la altura del rebote si lanzas la bola de 20 pies? Explica tu respuesta.

---

---

e) ¿Cuál es el dominio y campo de valores de este evento?

---



### Estación #3: Esferas plásticas

#### Materiales

Plastilina

Palillos

Balanza

Regla

#### Procedimiento

1. Usa plastilina para crear una esfera (bola) de más de una pulgada de diámetro.
2. Inserta un palillo a través de la bolita para medir el diámetro.
3. Toma la medida tres veces desde diferentes ángulos. Asegúrate que pase lo más cercano al centro.
4. Promedia estas tres medidas.
5. Usa la balanza para halla la masa de la bolita.
6. Anota loa datos en la **Hoja de trabajo #3**.
7. Aumenta la masa de la bolita y repite el procedimiento del paso 2.
8. Traza la gráfica de los datos obtenidos.

#### Contesta:

- a) ¿Cuál es la variable independiente de este evento? ¿Cuál es la dependiente? Explica.

---

---

---

- b) Si el diámetro de la bolita es 8 centímetros, ¿Cuál será su masa? Explica como lo determinaste.

---

---

- c) Describe la gráfica que resultó de este evento?

---

---

- d) ¿Cuál es el dominio y campo de valores de este evento?

---





## Estación #4: Papeles y papelillos

### Materiales

Papel

Regla

### Procedimiento

1. Usa un papel cualquiera. Mide su perímetro (cm) y halla su área ( $\text{cm}^2$ ).
2. Anota estos datos iniciales en la **Hoja de trabajo #3**.
3. Corta el papel por la mitad. Halla el perímetro de uno de los pedazos y el área. Anota en la hoja de trabajo #4.
4. Coloca ambos pedazos uno encima del otro y haz un corte por la mitad. Halla el perímetro y área de uno de los pedazos.
5. Anota los resultados en la hoja de trabajo #4.
6. Coloca todos los pedazos uno encima de otros y repite el procedimiento hasta que no puedas cortar más.
7. Traza la gráfica de las siguientes relaciones en la misma cuadrícula.
  - a. Número de cortes y pedazos de papel.
  - b. Número de cortes y perímetro de un pedazo de papel.
  - c. Número de cortes y área de un pedazo de papel.

### Contesta:

- a) Describe cada una de las gráficas.

---

---

---

- b) ¿Cuál es el dominio y campo de valores de cada una de las relaciones?

---

---

---

- c) Si continuas cortando los papeles, ¿Cuál será el perímetro y área más pequeña que puedes obtener? Explica.

---

---

---

## Hoja de Trabajo #3

### Modelos matemáticos

#### Estación #1: Ultimate Bungie

# Liguillas	D1	D2	D3	DISTANCIA PROMEDIO
3				
5				
7				
8				
9				
10				

#### Estación #2: Ultimate Bungie

Altura inicial	Altura rebote #1	Altura rebote #2	Altura rebote #3	PROMEDIO Altura rebote

### Estación #3: Esferas plásticas

	<b>Diámetro 1</b>	<b>Diámetro 2</b>	<b>Diámetro 3</b>	<b>PROMEDIO Diámetro</b>	<b>Masa</b>
<b>Esfera 1</b>					
<b>Esfera 2</b>					
<b>Esfera 3</b>					
<b>Esfera 4</b>					
<b>Esfera 5</b>					
<b>Esfera 6</b>					
<b>Esfera 7</b>					

### Estación #4: Papeles y papelillos

<b># corte</b>	<b># papeles</b>	<b>Perímetro de cada papelillo</b>	<b>Área de cada papelillo</b>
<b>0</b>			
<b>1</b>			
<b>2</b>			
<b>3</b>			
<b>4</b>			
<b>5</b>			
<b>6</b>			
<b>7</b>			

Compara las gráficas que acabas de construir. Completa la siguiente tabla.  
Comparte tus comentarios con tus compañeros.

Semejanzas entre las gráficas	Diferencias entre las gráficas

### Assessment

Usando los materiales de esta actividad crea una situación real.

- ❖ Escribe el procedimiento a seguir.
- ❖ Identifica la variable independiente y dependiente.  
V. Independiente \_\_\_\_\_  
V. Dependiente \_\_\_\_\_
- ❖ Recolecta los datos de ambas variables
- ❖ Traza la gráfica.
- ❖ Indica el dominio y campo de valores del evento.
- ❖ Haz alguna predicción de los datos y justifícala.

## Extensión

*Maestr@: Para esta sección se recomienda ofrecer un a clase o taller a los estudiantes de manera que sepan utilizar la calculadora grafica y como trazar la grafica que mejor aproxima los datos.*

*Puede hacer una presentación a los estudiantes y analizar cada una de las graficas.*

*Puedes usar la calculadora gráfica para trazar cada una de las relaciones de la*

### Parte D.

Utiliza el comando de regresión para determinar el tipo de modelo matemático que mejor aproxima los datos.

Puedes hallar el modelo matemático y de esa manera hacer proyecciones más precisas.

Pasos para la regresión

- ❖ Stat
  - Edit
  - Entrar datos en L1 y L2
- ❖ 2nd Stat Plot
  - On
  - Tipo de grafica
  - Tipo de punto
- ❖ Graph
- ❖ Stat
  - Calc
  - Buscar regresión deseada
  - (Regresión) 2nd (L1) Coma(,) 2nd (L2)
    - Vars (y vars) – Y1
- ❖ Enter

Aparece el modelo matemático de acuerdo a la regresión seleccionada.

Investiga que modelo matemático mejor aproxima cada evento de la Parte D.

## Hoja de auto cotejo

Criterio	Si	No
1. Identifica Variable independiente de un evento.		
2. Identifica Variable dependiente de un evento.		
3. Clasifica las diferentes relaciones.		
4. Identifica las relaciones que son función.		
5. Determina el dominio de una relación.		
6. Determina el campo de valores de una relación.		
7. Usa unidades de medida correctas.		
8. Tabula los datos de un evento.		
9. Construye la gráfica de una relación.		
10. Analiza la gráfica de un evento.		
11. Hace predicciones a partir de una gráfica.		
12. Identifica las limitaciones del dominio y campo de valores de un evento.		
13. Compara y analiza diferentes gráficas para hacer predicciones.		
14. Crea un evento recolecta los datos y traza la gráfica.		
15. Analiza el evento creado y hace predicciones.		

### Hoja reflexiva (KWL)

Conocía del tema...	Hoy aprendí...	Me gustaría aprender más sobre