

<b>Título</b>	:	<b>LOS NÚMEROS REALES</b>
<b>Autor</b>	:	Dr. Edwin Morera González
<b>Materia</b>	:	Matemáticas
<b>Nivel</b>	:	Esta actividad está desarrollada para el nivel 7-9.
<b>Concepto Principal</b>	:	Números Reales
<b>Concepto Secundario</b>	:	Resolución de Problemas

**Conocimiento previo:** Conocer los conjuntos de números racionales e irracionales. Suma, resta, multiplicación y división de números racionales e irracionales. Estar familiarizado con la resolución de problemas verbales.

**Objetivos específicos:**

Al finalizar la actividad los participantes:

1. Definirán los siguientes conjuntos numéricos:
  - a. Números racionales
  - b. Números irracionales
2. Distinguirán entre número racional e irracional.
3. Reconocerán que todo número racional se puede representar como un decimal finito o periódico.
4. Reconocerán que todo número irracional se puede representar como un decimal infinito no periódico.
5. Simplificarán fracciones utilizando la calculadora gráfica.
6. Utilizarán la calculadora gráfica para efectuar operaciones con números racionales.
7. Utilizarán las leyes de los exponentes para simplificar expresiones que involucran potencias.
8. Utilizarán la calculadora gráfica para escribir un número en notación científica.
9. Utilizarán la calculadora gráfica para efectuar operaciones con números escritos en notación científica.
10. Simplificarán raíces cuadradas.
11. Efectuarán operaciones con raíces cuadradas.
12. Racionalizarán el denominador que tiene una raíz cuadrada.
13. Identificarán una o más razones que representen una comparación dada.
14. Expresarán razones usando la notación apropiada ( $\frac{a}{b}$ ,  $a:b$ ,  $a \underline{a} b$ ).
15. Describirán una proporción como dos razones equivalentes.

**Trasfondo:**

*“El concepto número es la distinción evidente entre la bestia y el hombre. Gracias a un número, el grito se transforma en canto, el ruido adquiere ritmo, la primavera se transforma en un baile, la fuerza se convierte en dinámica, y se delinean las figuras”, Joseph de Maistre, filósofo francés del siglo XIX.*

Los números naturales y los cardinales no son suficientes para las necesidades de la vida diaria. Necesitamos medir temperaturas bajo cero, pérdida de yardas en juegos de fútbol, pérdidas financieras en el mercado de valores. ¡Necesitamos **Números negativos**! ¿Quién y cuándo los inventó y los usó? He aquí una respuesta parcial.



- ALACiMa²**
- **China:** Los números negativos se usaron desde el siglo I. En sus tablas de cálculo, las barras negras representaban los números negativos y las rojas los positivos.
  - **India:** Los matemáticos indios de los siglos VI y VII usaban los números negativos. Por ejemplo, Bramagupta (siglo VII) enseñaba la forma de realizar sumas y restas de bienes, deudas e inexistencias, “una deuda rebajada de la nada se convierte en un bien; un bien rebajado de la nada se transforma en una deuda”.
  - **Italia:** Los números negativos se usaron a finales del siglo XV como soluciones para las ecuaciones. Por ejemplo, los escritos del matemático italiano Girolamo Cardano (1501 – 1576) incluían números negativos.
  - **Francia:** A diferencia de Cardano, el matemático francés François Viète (1540 – 1603) sólo dio las soluciones positivas como solución a las ecuaciones.

Pero la historia no termina allí. Dividir un entero por otro, distinto a cero, da lugar a un nuevo número, un número **racional**. Estos números (a los que también llamamos fracciones) pueden también escribirse como decimales. Podríamos imaginar que el viaje numérico termina en los números racionales. Sin embargo, los Pitagóricos, una sociedad secreta de estudiosos de la antigua Grecia (aproximadamente 540 – 500 a.C.) realizaron un descubrimiento sorprendente: los números irracionales ( $\sqrt{2}$  y  $\pi$  son irracionales). Estos números desafiaron sus conocimientos acerca de las propiedades de los números, porque no pueden escribirse como la proporción de números naturales. Nosotros usamos los racionales y los irracionales en un conjunto nuevo de números, llamados números **reales**.

### Glosario:

- Números racionales:  $\{ \frac{a}{b} | a, b \text{ son números enteros con } b \neq 0 \}$
- Números irracionales: el conjunto de todos los números de la recta numérica que NO son racionales.
- Números reales: es la unión del conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales.
- Subconjunto propio:  $B \subset A$  si y solo si  $\forall b \in B \Rightarrow b \in A$  y  $\exists a \in A$  tal que  $a \notin B$ .
- Intersección de conjuntos:  $A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}$
- Unión de conjuntos:  $A \cup B = \{x | x \in A \text{ o } x \in B\}$
- Fracción en su forma más simple: Si  $a$  y  $b$  son enteros positivos, entonces  $\frac{a}{b}$  y  $\frac{-a}{b}$  se dice que está en su **forma estándar**. Una fracción está en su **forma más simple** si esta en forma estándar y el máximo común divisor entre  $a$  y  $b$  es 1.
- Raíz cuadrada principal: sea  $a \geq 0$  la **raíz cuadrada principal** de  $a$ , denotada por  $\sqrt{a}$ , es un número real  $b \geq 0$  tal que  $\sqrt{a} = b$  si y solo si  $b^2 = a$ .
- Raíz n-ésima: Para un número natural  $n$ , y  $a$  y  $b$  números reales:  $a$  es una raíz n-ésima de  $b$  si,  $a^n = b$ . Por ejemplo, 3 y -3 son una raíz cuarta de 81, pues  $3^4 = 81$  y  $(-3)^4 = 81$ .
- Teorema de Pitágoras: un triángulo es rectángulo si y solo si la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

### Materiales y equipo:

1. papelotes
2. marcadores
3. cinta adhesiva
4. calculadoras gráficas TI-84 Plus
5. computadora
6. proyector digital (Infocus)





**LOS NÚMEROS REALES**

**Hoja de Trabajo 1**

I. Defina los siguientes conjuntos numéricos:

a. Números racionales:

b. Números Irracionales:

c. Números reales:

II. Llene los siguientes blancos:

a. El conjunto de los números \_\_\_\_\_ es subconjunto propio del conjunto de los números cardinales.

b. El conjunto de los números \_\_\_\_\_ es subconjunto propio del conjunto de los números enteros.

c. El conjunto de los números \_\_\_\_\_ es subconjunto propio del conjunto de los números racionales.

d. El conjunto de los números racionales es subconjunto propio del conjunto de los números \_\_\_\_\_.

e. El conjunto de los números irracionales es subconjunto propio del conjunto de los números \_\_\_\_\_.

f. La intersección entre el conjunto de los números racionales e irracionales es \_\_\_\_\_.

g. La unión entre el conjunto de los números racionales e irracionales es \_\_\_\_\_.

II. Establezca las siguientes propiedades de los exponentes,  $a$  y  $b$  son un números reales:

a.  $a^n =$  \_\_\_\_\_,  $n$  entero positivo

b.  $a^0 =$  \_\_\_\_\_

c. Si  $n$  es un entero negativo,  $a^n =$  \_\_\_\_\_

d. Si  $m$  y  $n$  son enteros,  $a^m a^n =$  \_\_\_\_\_

e. Si  $m$  y  $n$  son enteros,  $(a^n)^m =$  \_\_\_\_\_

f. Si  $m$  y  $n$  son enteros,  $(ab)^m =$  \_\_\_\_\_

g. Si  $m$  y  $n$  son enteros y  $b \neq 0$ ,  $\left(\frac{a}{b}\right)^m =$  \_\_\_\_\_ (¿Por qué  $b$  tiene que ser distinto a cero?)

h. Si  $m$  y  $n$  son enteros y  $a \neq 0$ ,  $\frac{a^m}{a^n} =$  \_\_\_\_\_

IV. Efectúe las operaciones y simplifique.

a.  $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} =$

b.  $\left(\frac{25}{8} \div \frac{5}{16}\right) \cdot \frac{4}{15} =$

c.  $\frac{\frac{2}{3} - 1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}} =$

d.  $4\sqrt{8} - 5\sqrt{50} + \sqrt{72} =$

e. Racionalice el denominador de  $\frac{2}{3 + \sqrt{5}}$

**LOS NÚMEROS REALES**

**Hoja de Trabajo 2**

I. Discuta las siguientes propiedades de los exponentes con tu pareja y luego resuelve los ejercicios:

i.  $a^n = a \times a \times a \times \dots \times a$ ,  $n$  veces o  $n$  factores de  $a$ ,  $n$  entero positivo

j.  $a^0 = 1$ ,  $a \neq 0$

k. Si  $n$  es un entero positivo,  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

l. Si  $m$  y  $n$  son enteros,  $a^m a^n = a^{m+n}$

m. Si  $m$  y  $n$  son enteros,  $(a^n)^m = a^{nm}$

n. Si  $m$  y  $n$  son enteros,  $(ab)^m = a^m b^m$

o. Si  $m$  y  $n$  son enteros y  $b \neq 0$ ,  $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

p. Si  $m$  y  $n$  son enteros y  $a \neq 0$ ,  $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n}, & \text{si } m-n > 0 \\ 1, & \text{si } m-n = 0 \\ \frac{1}{a^{n-m}}, & \text{si } m-n < 0 \end{cases}$

Ejercicios: Utilice las propiedades de los exponentes para resolver los siguientes ejercicios:

1. Mencione la diferencia entre  $(-4)^2$  y  $-4^2$ .

2.  $0^0 =$

3. Simplifique  $3^3(81) =$

4.  $\frac{5^4}{125} =$

5.  $\frac{-3^2}{81} =$

6.  $\frac{5^{-3}}{5^{-4}} =$



AlACiMa²

7.  $(2^{-3} \cdot 5^4)(2^7 \cdot 5^{-5}) =$

8.  $(3^2 \cdot 7^{-3})^{-2} =$

9.  $\left(\frac{2^3}{5^2}\right)^{-2} =$

10.  $\left(\frac{2^{-3}}{5^4 \cdot 5^{-5}}\right)^{-3} =$



ALACiMa²

**LOS NÚMEROS REALES**

**Hoja de Trabajo 3**

I. Lleva a cabo las siguientes operaciones y simplifica:

a.  $\frac{1,920,000}{0.000032} \times \frac{0.0015}{45,000} =$

b.  $\frac{0.002 \times 3,900}{0.000013} =$

c.  $\frac{0.009 \times 600,000}{0.00000002} =$

d.  $\frac{0.000004 \times 56,000,000}{0.000112} =$

e.  $\frac{0.00018}{300,000} \times \frac{20,000}{0.000004} =$

f.  $\frac{840,000}{0.00021} \times \frac{0.0003}{600,000,000} =$

II. Resuelva los siguientes problemas:

- a. En 1985, los gastos en cuidado de la salud en los E.U. fue de 428.2 billones de dólares. En 1995, esta cifra aumentó por un factor de 2.3, esto es, fue más del doble en tan sólo 10 años. (Fuente: U.S. Health Care Financing Administration.)
- Escriba la cantidad de gastos en cuidado de salud de 1985 usando notación científica.
  - ¿Cuánto fue el gasto en 1995? (Escrito en notación científica.)

- b. El 28 de octubre de 1998, IBM anunció que ofrecerían una computadora que sería capaz de llevar a cabo  $3.9 \times 10^8$  operaciones por segundo. Esto fue 15,000 veces más rápido que la computadora de “desktop” normal en ese tiempo. ¿Cuál era el número de operaciones por segundo que podía hacer una computadora “desktop” normal? (Fuente: IBM.)
- c. En la lotería “Powerball” que se juega en los E.U., un jugador debe escoger 5 números desde 1 hasta el 49 y un número desde 1 hasta el 42. Se puede probar que hay alrededor de  $8.009 \times 10^7$  diferentes formas de hacer esto. Suponga que un grupo de 2,000 personas decide comprar un boleto y dividirse las ganancias por igual en el caso que uno de los boletos salga premiado. ¿Suponiendo que el juego paga la misma cantidad de jugadas posibles, ¿cuánto cobraría cada persona del grupo? (Fuente: [www.powerball.com](http://www.powerball.com))
- d. Un *parsec*, la unidad de longitud usada en astronomía, es  $19 \times 10^{12}$  millas. La distancia desde el Sol hasta Urano es aproximadamente  $1.8 \times 10^7$  millas. ¿Cuántos parsec hay desde el Sol hasta Urano?





ALACiMa²

**LOS NÚMEROS REALES**

**Hoja de Trabajo 4**

I. Lleva a cabo las siguientes operaciones y simplifica:

g.  $\frac{-3}{2} \cdot \frac{1}{6} =$

h.  $\frac{4}{-9} \cdot \frac{-15}{8} + \frac{5}{18} =$

i.  $\left(\frac{-2}{3} - \frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{3}{5} + \frac{-4}{3}\right) =$

j.  $3\sqrt{24} - 5\sqrt{54} + 2\sqrt{6} =$

k.  $2\sqrt{5} - 6\sqrt{20} + 5\sqrt{45} =$

l.  $7\sqrt{28} + 2\sqrt{63} - 4\sqrt{36} =$

II. Racionalice el denominador

e.  $\frac{-5}{\sqrt{8}}$

f.  $\frac{1}{2 + \sqrt{2}}$

g.  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$



ALACiMa²

III. Clasifique las siguientes afirmaciones en cierta o falsa. Explique su razonamiento.

a.  $-\frac{1}{2}$  está en su forma más simple.

b.  $\sqrt{2} = 1.414213562$

c.  $\frac{1}{3} = 0.3333333333$

d.  $\sqrt{225}$  es un número irracional.

e.  $0.454545\dots$  es un número irracional.

f.  $\sqrt{16}$  es igual a 4 y a -4.

g.  $\sqrt{10}$  es un número irracional entre 2 y 3.

**LOS NÚMEROS REALES**

**Hoja de Trabajo 5**

I. Escribe las razones dadas en su forma más simple:

- a. La razón de carros a personas es 1 a 3. \_\_\_\_\_
- b. La razón de galones a millas es 20 a 4. \_\_\_\_\_
- c. La razón de millas a galones es 25 a 1. \_\_\_\_\_
- d. La razón de donas a dólares es 24 a 2. \_\_\_\_\_
- e. La razón de potes de salda a dólares es 10 a 5. \_\_\_\_\_

II. Clasifique las siguientes afirmaciones en cierta o falsa. Explique su razonamiento.

- a. La forma más simple de la razón 6 a 4 es 1.5.
- b. La expresión  $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$  es una proporción.
- c. La razón de  $2\frac{1}{2}$  a  $6\frac{1}{3}$  no es permitida por que una razón no puede contener fracciones.
- d. La razón de 12 a 4 es la misma que la razón de 1 a 3.

III. Resuelve las siguientes proporciones y utilízalas para descubrir el secreto que se encierra en el Anejo 1.

- a.  $\frac{5}{1} = \frac{A}{6}$
- b.  $\frac{1}{9} = \frac{4}{B}$
- c.  $\frac{C}{2} = \frac{5}{1}$
- d.  $\frac{7}{D} = \frac{1}{8}$
- e.  $\frac{12}{18} = \frac{E}{12}$
- f.  $\frac{12}{15} = \frac{20}{F}$
- g.  $\frac{G}{24} = \frac{14}{16}$



ALACiMa²

h.  $\frac{4}{H} = \frac{3}{15}$

i.  $\frac{2}{3} = \frac{I}{24}$

j.  $\frac{4}{5} = \frac{3}{J}$

k.  $\frac{3}{K} = \frac{2}{5}$

l.  $\frac{L}{18} = \frac{5}{6}$

m.  $\frac{7\frac{1}{5}}{9} = \frac{M}{5}$

n.  $\frac{4}{2\frac{2}{3}} = \frac{3}{N}$

o.  $\frac{P}{4} = \frac{4\frac{1}{2}}{6}$

p.  $\frac{5}{2} = \frac{Q}{12\frac{3}{5}}$

q.  $\frac{15}{R} = \frac{7}{12\frac{3}{5}}$

r.  $\frac{1\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}} = \frac{S}{2\frac{2}{3}}$

s.  $\frac{33}{2\frac{1}{5}} = \frac{3\frac{3}{4}}{T}$

t.  $\frac{U}{1\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$

u.  $\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{3}{4}}{V}$

v.  $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{X}{\frac{2}{3}}$

w.  $\frac{9}{Y} = \frac{1\frac{1}{2}}{3\frac{2}{3}}$

x.  $\frac{Z}{2\frac{1}{3}} = \frac{1\frac{1}{2}}{4\frac{1}{5}}$

**NÚMEROS REALES Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

**Anejo 1**

En este problema utilizarás los resultados de la parte III de la HT5 para encontrar un **secreto**. En la siguiente matriz sustituye el número por la letra correspondiente, por ejemplo, en el problema IIIf encontraste que  $F = 25$ , para encontrar el secreto sustituye la letra F en todos los renglones donde se encuentre el 25. Algunas letras no aparecerán en la matriz y la letra O y las comas están colocada.

15	11	32	7	4	11	1/4	8	4	11	1/4	16	–
10	11	32	7/9	32	O	2	44	25	11	10	16	–
15	8	32	115	3	11	9	11	126	1	2	O	32
,	1/7	56	16	25	16	10	16	15	8	32	1/16	2/7
3	11	9	11	2/7	O	1/4	9	O	32	,	1/5	47
3	8	9	O	2/7	2	8	10	8	32	11	9	–
16	11	32	4/9	3	11	9	11	1/10	1/4	O	56	–
O	32											